



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

ANÁLISE DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIO POROSO

Por,

Matheus Morato Soares

Rafael Domenici Pereira Simões

Brasília, 14 de Setembro de 2012

UNIVERSIDADE DE BRASILIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ANÁLISE DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM
MEIO POROSO**

POR,

Matheus Morato Soares
Rafael Domenici Pereira Simões

Relatório submetido como requisito final para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Prof. Eugenio Libório Feitosa Fortaleza, UnB/
ENM (Orientador de Rafael Domenici Pereira Simões)

Prof. Gustavo Coelho Abade, UnB/ ENM
(Orientador de Matheus Morato Soares)

Prof. Éder Lima de Albuquerque, UnB/ ENM

Brasília, 14 de Setembro de 2012

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento analítico do fenômeno de cone de água em regime permanente para bombeamento constante, além de simulações numéricas que utilizam o método dos elementos de contorno (MEC). Foi feita uma comparação entre o estudo analítico, desenvolvido por meio de transformações conformes, e o método numérico, além de validar este último com referências na literatura. Os parâmetros mais relevantes a serem comparados são: altura de formação do *cusp*, vazão crítica, que determina a formação do cone, e o formato da interface entre os fluidos analisados.

ABSTRACT

This paper presents the analytical study of the water coning phenomenon, considering permanent flow and constant pumping, as well as numerical simulations using the boundary element method (BEM). A comparison was made between the analytical solution, developed using conformal transformations, and the numerical method. Besides that, the numerical method was validated based on literature references. The most relevant parameters to be compared are: height of the cusp point, critical flow, which determines the formation of the cone, and the shape of the interface between the analyzed fluids.

Sumário

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 ASPECTOS GERAIS.....	1
1.3 OBJETIVOS.....	5
1.4 COMPOSIÇÃO E ESTRUTURA DO TRABALHO	6
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	7
2.1 MAPEAMENTO CONFORME	7
2.2 TRANSFORMAÇÃO INVERSA.....	8
2.3 TRANSFORMAÇÃO DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL	9
3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	11
3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	11
3.2 PARÂMETRO ADIMENSIONAL.....	11
3.3 EQUAÇÃO GOVERNANTE	13
4 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO.....	19
4.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO	19
4.2 MÉTODO HODOGRÁFICO	20
5 MÉTODO ITERATIVO	32
5.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON GENERALIZADO	32
5.2 MÉTODO ALTERNATIVO	34
6 CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA: ANALOGIA ENTRE TEORIA E EXPERIMENTO	35
7 MÉTODO NUMÉRICO	39
8 APARATO EXPERIMENTAL	43
8.1 EQUAÇÕES DO HELE-SHAW POR APROXIMAÇÃO DE FILME DELGADO	44
8.2 ESTIMATIVA DO NÚMERO DE REYNOLDS	48
9 RESULTADOS	49
9.1 VAZÃO CRÍTICA.....	49
9.2 FORMATO DA INTERFACE.....	51
9.3 NÚMERO DE FROUDE CRÍTICO.....	52
10 CONCLUSÃO	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	55
ANEXOS	56

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. FENÔMENO CONE DE ÁGUA [5].	2
FIGURA 2. BARREIRA SÓLIDA IMPERMEÁVEL [5].	4
FIGURA 3. TÉCNICA DE COMPLETAÇÃO DUPLA [5].	5
FIGURA 4. (A) REGIÃO R DO PLANO-Z (B) REGIÃO R_1 DO PLANO-T [4].	7
FIGURA 5. (A) POLÍGONO NO PLANO-Z (B) POLÍGONO NO PLANO-T [4].	10
FIGURA 6. PLANO FÍSICO.	11
FIGURA 7. ESQUEMA REPRESENTATIVO DO EXPERIMENTO DE DARCY [2].	14
FIGURA 8. PLANO-Z.	21
FIGURA 9. PLANO-W.	22
FIGURA 10. PLANO-F.	23
FIGURA 11. PLANO- ζ .	25
FIGURA 12. PLANO- t .	26
FIGURA 13. INTERFACE CALCULADA NO PLANO-Z.	31
FIGURA 14. PLACAS VERTICAIS PARALELAS [2].	35
FIGURA 15. GEOMETRIA SIMULADA PARA COMPARAÇÃO COM [12].	40
FIGURA 16. FLUXO NAS LATERAIS DO DOMÍNIO EM FUNÇÃO DO TEMPO.	41
FIGURA 17. MODELO DO EXPERIMENTO [12].	43
FIGURA 18 – ESCALAS CARACTERÍSTICAS PARA O ESCOAMENTO NA CÉLULA DE HELE-SHAW.	46
FIGURA 21. COMPARAÇÃO DAS POSIÇÕES DAS INTERFACES OBTIDAS PELO MODELO NUMÉRICO E PELO MODELO ANALÍTICO PARA GEOMETRIA ($2\text{ m} \times 0,3\text{ m}$).	51
FIGURA 22. COMPARAÇÃO DAS POSIÇÕES DAS INTERFACES OBTIDAS PELO MODELO NUMÉRICO E PELO MODELO ANALÍTICO PARA GEOMETRIA ($2\text{ m} \times 0,4\text{ m}$).	51
FIGURA 23. COMPARAÇÃO DAS POSIÇÕES DAS INTERFACES OBTIDAS PELO MODELO NUMÉRICO E PELO MODELO ANALÍTICO PARA GEOMETRIA ($2\text{ m} \times 0,5\text{ m}$).	52

LISTA DE TABELAS

TABELA 1. SIMULAÇÕES PARA A GEOMETRIA PROPOSTA PARA DIFERENTES ESPESSURAS.	44
TABELA 2. COMPARAÇÃO ENTRE AS VAZÕES CRÍTICAS ANALÍTICAS E NUMÉRICAS PARA DIFERENTES GEOMETRIAS DO HELE- SHAW.	50
TABELA 3. NÚMERO DE FROUDE CRÍTICO PARA GEOMETRIAS SEMELHANTES.	53

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

d	Altura do nível de glicerina	[m]
g	Gravidade	[m/s ²]
k	Permeabilidade do meio	[m ²]
p	Pressão	[Pa]
q	Módulo do vetor velocidade na interface	[m/s]
Q	Vazão	[m ³ /s]
s	Módulo do vetor distância na interface	[m/s]
t	Tempo	[s]
u	Velocidade ao longo do eixo x	[m/s]
v	Velocidade ao longo do eixo y	[m/s]

Símbolos Gregos

Δ	Variação entre duas grandezas similares	
μ	Viscosidade dinâmica	[Pa.s]
ρ	Massa específica	[kg/m ³]
ψ	Função linha de corrente	
Φ	Potencial de velocidade	

Grupos Adimensionais

F	Número de Froude
Re	Número de Reynolds

Sobrescritos

-	Conjugado
---	-----------

Siglas

MEC	Método dos Elementos de Contorno
-----	----------------------------------

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Segundo a Empresa de Pesquisa Energética (EPE), a produção de petróleo no País deverá quase triplicar até 2020, saltando dos atuais 2,3 milhões de barris por dia para 6,1 milhões de barris por dia. A necessidade de novas técnicas que proporcionem um aumento de produção e redução de custos é também crescente. A engenharia de reservatórios, uma área da engenharia de petróleo, estuda basicamente a retirada dos fluidos do interior das rochas, de modo que eles possam ser conduzidos até a superfície. Tendo em vista a maximização da produção e redução de custos, são estudadas as caracterizações das jazidas, as propriedades das rochas e as leis físicas que regem o movimento dos fluidos em seu interior [11]. Um dos focos da engenharia de reservatórios é o escoamento bifásico em meios porosos devido ao impacto econômico que representa a produção de água em um poço de petróleo durante os processos de recuperação primária e secundária, ou seja, durante os processos de elevação natural e artificial respectivamente. Nesse contexto, o fenômeno cone de água é de grande relevância e será abordado em nosso trabalho.

1.2 ASPECTOS GERAIS

O cone de água, representado na Fig. 1, caracteriza-se, como o próprio nome sugere, pela formação de um cone de água em decorrência do deslocamento preferencial da água em relação ao óleo quando um gradiente de potencial é induzido pela produção de óleo no poço produtor na zona de óleo. O gradiente é gerado de maneira radial no reservatório e por isso estende-se até a zona de água gerando o cone. Devido a esse deslocamento preferencial, que é gerado em função da diferença de viscosidade entre os fluidos, há uma invasão da zona de água na zona de óleo. À medida que o cone se forma, há um aumento da relação entre a água e o óleo produzido, o que é altamente indesejável. O aumento da relação água-óleo provoca não só uma redução na produtividade do poço, mas também um aumento no custo de separação no processamento primário do petróleo. Para valores muito altos dessa relação, a produção pode ser inviável.

Como em diversas outras áreas da ciência, o fenômeno do cone de água pode ser estudado a partir de diferentes abordagens. A literatura descreve três formas para se estudar o fenômeno do cone de água. São eles os modelos analíticos, numéricos e experimentais. Cada um dos modelos possui aspectos positivos e negativos.

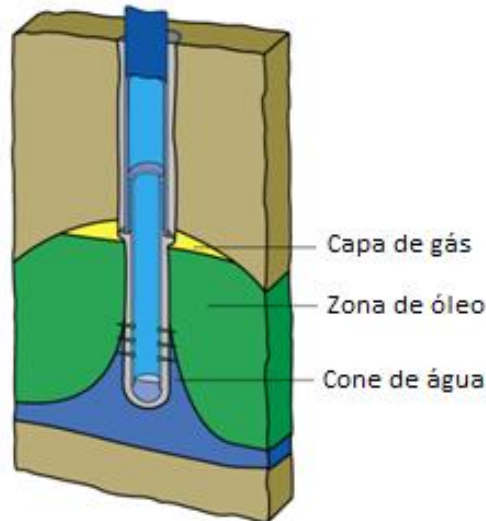


Figura 1. Fenômeno cone de água [5].

Os modelos analíticos para o fenômeno são formulados a partir de equações diferenciais que descrevem escoamentos em meios porosos. Utilizam a conservação de massa e a Lei de Darcy aplicada a meios porosos para solucionar o problema [7]. Devido à complexidade do escoamento, todos os modelos analíticos, de uma forma ou de outra, utilizam simplificações que restringem a utilização das equações obtidas. A maior parte dos modelos parte da suposição da formação de um cone estável, ou seja, em regime permanente, pois dessa forma ocorre um equilíbrio entre as forças viscosas, causadas pelo fluxo bifásico, e a força gravitacional, que resulta da diferença de densidade entre os fluidos, água e óleo.

As limitações dos modelos analíticos são claras. Eles não permitem, por exemplo, análises transientes e se restringem a casos muito específicos, como um único poço ou ausência de completação dupla. Portanto, a análise dos resultados obtidos a partir de modelos analíticos deve sempre ser cautelosamente relacionada às condições para as quais os modelos foram formulados. Além disso, devem ser entendidas as implicações que uma determinada alteração no poço/reservatório tem sobre os resultados para melhor avaliação.

Tendo em vista as dificuldades, as limitações inerentes aos métodos analíticos e os avanços na área computacional, tem-se aumentado a utilização dos métodos numéricos para a resolução de problemas como o do cone de água. Tais modelos solucionam numericamente o sistema de equações obtido a partir da discretização no tempo e espaço das equações diferenciais que governam os escoamentos dos fluidos em meios porosos, como é o caso dos reservatórios.

O maior uso dos modelos numéricos deve-se principalmente à facilidade em se analisar casos mais complexos e heterogêneos, pois implica apenas em maior custo computacional. Tal característica desses modelos é essencial não só devido à complexidade do fenômeno e

heterogeneidade dos reservatórios, mas também porque possibilita a análise dos diferentes métodos de controle do cone de água. Além disso, por meio dos métodos numéricos torna-se possível a análise de escoamentos em regime transiente, mesmo após a irrupção da água.

A abordagem experimental também é bastante útil, principalmente no que tange a validação de modelos analíticos e numéricos. Devido à complexidade do fenômeno real analisado, que está relacionada não só com o escoamento em si, mas também com a tridimensionalidade do modelo, os experimentos são conduzidos, em geral, em células de Hele-Shaw. Tal aparato consiste em duas placas planas paralelas. Entre as placas induz-se um escoamento que, devido à capilaridade, assemelha-se à um escoamento em meio poroso. Células de Hele-Shaw têm sido utilizadas não só para o estudo do fenômeno de cone de água, mas também para o de digitação viscosa ou *fingering*. Como tal experimento é a base do presente trabalho, mais detalhes serão esclarecidos à frente.

Um aspecto bastante interessante de se abordar ao introduzir o fenômeno do cone de água são as formas de controle do cone, ou seja, o que já foi, o que tem sido e o que será feito para maximizar a produção em um reservatório sem que, ao mesmo tempo, seja produzida água em excesso, de modo que o processamento primário não apresente custos proibitivos. Antes de apresentar os mecanismos é preciso ter em mente parâmetros que influenciam na formação do cone de água. São eles: a vazão de produção do petróleo, a localização e o comprimento do canhoneado do poço produtor.

Segundo [3], as medidas de controle podem ser classificadas em medidas de controle atuantes no poço e medidas que atuam no reservatório em si. Muitas medidas podem ser aplicadas em conjunto para melhor eficácia do sistema.

Para o poço produtor, pode-se apontar como medida de controle da produção de água a otimização das técnicas de completação, o que inclui não só a determinação da posição ótima do canhoneado em relação ao contato óleo/água, mas também a extensão e posicionamento desse. Note que caso a zona de produção esteja muito próxima ao contato dos fluidos, a coluna de água para formação do cone seria pequena o que favoreceria a formação desse. Além disso, em um reservatório com capa de gás, um posicionamento do intervalo canhoneado próximo ao contato gás/óleo induziria a formação de um cone “invertido” de gás. Estudos mais aprofundados do fenômeno são fundamentais para a otimização das técnicas de completação. Ainda com relação ao poço, pode-se controlar o fenômeno alterando-se a vazão de produção ou reduzindo-se a penetração do poço no reservatório. Existem estudos que apontam a alternativa do bombeamento pulsante, sendo vazões muito altas alternadas com vazões nulas. Em [12], aponta-se que o bombeamento pulsante é interessante apenas em uma fase inicial da produção e

apresenta menor produtividade em relação ao bombeamento de vazão constante após algum tempo.

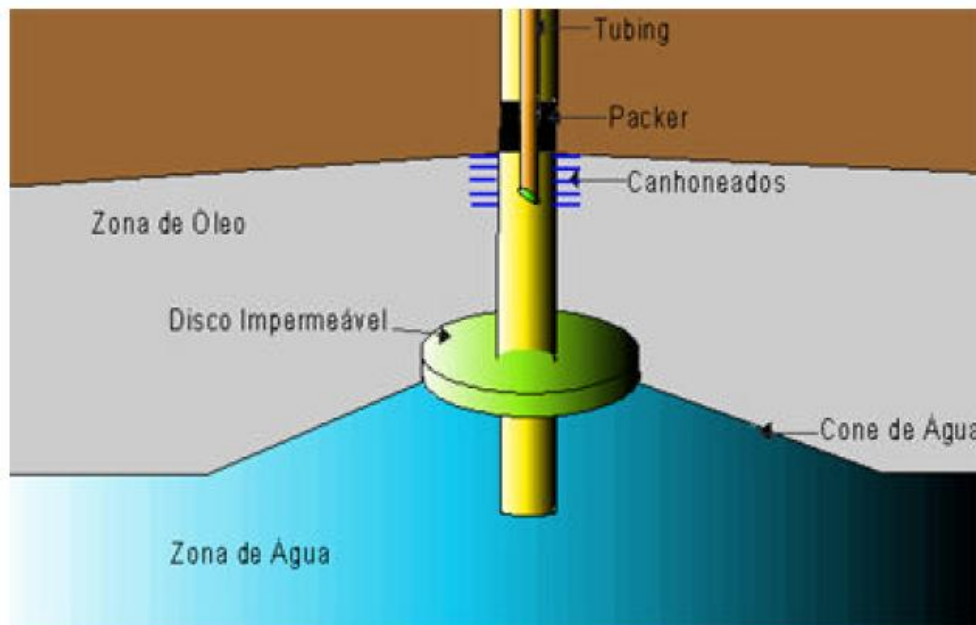


Figura 2. Barreira sólida impermeável [5].

Quanto ao controle feito no próprio reservatório, ele é dependente da existência de um contato água/óleo bem definido ou não [3]. Quando o contato é bem definido, ou seja, quando as zonas de óleo e de água estão bem separadas, utilizam-se barreiras sólidas permanentes para separar as zonas mencionadas, como indicada na Fig. 2, o que provoca o bloqueio do fluxo de água. Essas barreiras são criadas por meio da injeção de polímeros, resinas ou gel-silicatos, ou por meio de cimento. Neste caso, é necessária uma operação conhecida por fraturamento hidráulico, que cria fraturas artificiais no reservatório por meio de um fluido de fraturamento injetado a uma pressão mais elevada que a de fratura da rocha. Caso a zona de contato água/óleo não esteja bem definida, utilizam-se barreiras seletivas que alteram a viscosidade da água e consequentemente a sua mobilidade em relação ao óleo. Uma vez que a mobilidade é inversamente proporcional à viscosidade, injetam-se polímeros hidrossolúveis no poço com a intenção de aumentar a viscosidade e diminuir a mobilidade da água.

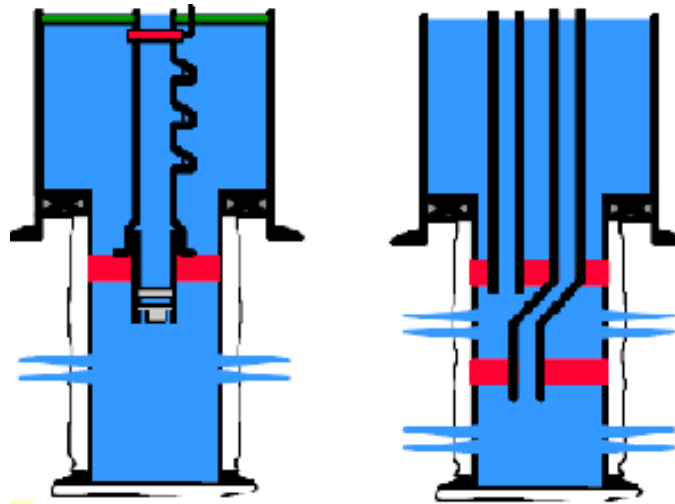


Figura 3. Técnica de completção dupla [5].

Pode-se ainda mencionar outras técnicas de controle, como a introdução de diversos poços de vazões menores ou mesmo a técnica de completção dupla, como mostra a Fig. 3. Tal técnica consiste em produzir água, além de óleo, em outro intervalo canhoneado abaixo do primeiro, de maneira que seja induzida uma pressão negativa nesse ponto e que gere um equilíbrio das pressões entre os dois intervalos, o que dificulta a formação do cone de água. Tal técnica é bastante eficaz, no entanto ao utilizá-la, deve-se levar em consideração a quantidade de água produzida devido aos custos inerentes ao seu tratamento.

1.3 OBJETIVOS.

Neste trabalho, tem-se como objetivos realizar o estudo analítico e numérico do cone de água, fenômeno que limita ou mesmo inviabiliza a extração de petróleo em reservatórios, e o projeto de um aparato experimental, a célula de Hele-Shaw. Para o estudo analítico, utilizar-se-á a teoria das transformações conformes. Para realizar o estudo numérico, lançar-se-á mão do *software* MatLab para simular o problema do cone de água, sendo o Método dos Elementos de Contorno (MEC) o método numérico utilizado. Para projetar o aparato experimental, utilizar-se-ão os métodos analítico e numérico uma célula de Hele-Shaw, que simulará, em trabalhos futuros, um cone bidimensional e que, portanto poderá ser comparado com os resultados numéricos e analíticos.

De maneira esquemática, os objetivos são:

1. Realizar uma revisão bibliográfica sobre estudos analíticos, numéricos e experimentais;
2. Desenvolver um estudo analítico do fenômeno utilizando transformações conformes;
3. Realizar simulações numéricas;

4. Validar as simulações a partir de soluções analíticas e soluções encontradas na literatura;
5. Dimensionamento do aparato experimental (célula de Hele-Shaw);
6. Comparar os estudos analítico e numérico segundo os seguintes parâmetros: posição de formação do *cusp*, vazão crítica para formação do cone e formato da interface ar-glicerina.

1.4 COMPOSIÇÃO E ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está dividido em 10 Capítulos principais:

1. Introdução: apresenta-se uma visão geral do problema e o porquê do trabalho, são apresentadas a motivação e os objetivos a serem cumpridos ao final do trabalho.
2. Revisão bibliográfica: apresenta-se a teoria importante para o entendimento do presente trabalho.
3. Formulação do problema: o problema do cone de água é apresentado de maneira formal e evidenciam-se as equações governantes do problema.
4. Desenvolvimento analítico: a partir das equações que governam o problema, aplica-se a teoria das transformações conformes para formular uma função que descreve a interface ar-glicerina.
5. Método iterativo: apresentam-se os métodos iterativos utilizados para obtenção da vazão crítica.
6. Condutividade hidráulica (analogia entre teoria e experimento): apresenta-se uma analogia entre as dimensões do experimento, as propriedades dos fluidos e a condutividade hidráulica do meio.
7. Método numérico: apresenta-se, de maneira breve, o programa utilizado para simulação por MEC e comparam-se resultados com outros encontrados na literatura.
8. Aparato experimental: apresenta-se o projeto e dimensionamento da célula de Hele-Shaw.
9. Resultados: resultados analíticos e numéricos são apresentados e comparados quanto aos seguintes parâmetros: vazão crítica para formação do cone e formato da interface ar-glicerina.
10. Conclusões: com base no que foi desenvolvido, são apresentados quais os objetivos foram alcançados e quais serão abordados em trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O trabalho que se segue apresenta um desenvolvimento analítico não trivial. Quer-se encontrar a equação para a forma da interface. Para isso, de maneira simplificada, transforma-se a interface não conhecida no plano físico em formas já conhecidas em planos auxiliares. Essas transformações são conhecidas como mapeamentos conformes. Sua teoria será explorada nesta revisão bibliográfica.

2.1 MAPEAMENTO CONFORME

Grande parte do método analítico, para a solução de problemas de escoamento bidimensional em meio poroso, está relacionada com a determinação de uma função, que irá transformar um problema de um domínio geométrico, dentro do qual uma solução é pedida, em outro, dentro do qual a solução é conhecida. Para fazer essa transformação, uma ferramenta muito utilizada é o mapeamento conforme, que tem a propriedade de preservar ângulos de intersecção e a imagem aproximada de pequenas formas. Seu objetivo é transformar a geometria do domínio original em outra geometria de maior simplicidade.

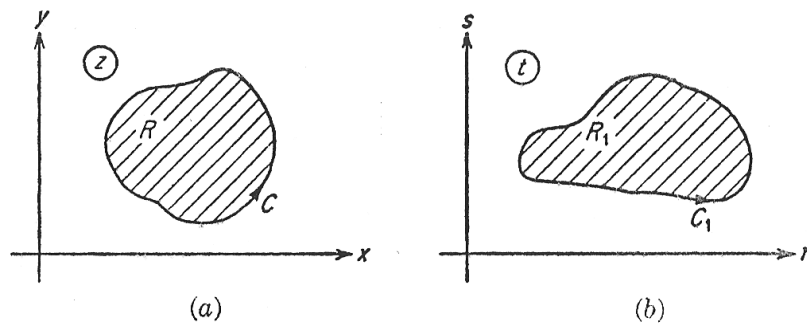


Figura 4. (a) Região R do plano- z (b) Região R_1 do plano- t [4].

A utilidade do mapeamento conforme em problemas de escoamento bidimensional deriva do fato de que as soluções da equação de Laplace permanecem soluções quando submetidas a transformações conformes. Sendo $w = \phi + i\psi = f(z)$ o potencial complexo, onde ϕ representa o potencial e ψ a função de corrente, e assumindo que ambas as partes real e imaginária satisfaçam a equação de Laplace na região R do plano- z , mostrado na Fig. 4a, então,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Agora, supondo que exista uma segunda função analítica $z = F(t)$, com $t = r + is$, que mapeia o interior da curva C no interior da curva C_1 , mostrado na Fig. 4b. A função $w = f[F(t)]$ é uma função analítica de uma função analítica, que por sua vez também é analítica, portanto,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = 0$$

A utilidade disso é que a solução de um problema de escoamento bidimensional em meio poroso poderá ser simplificada buscando apenas a solução da equação de Laplace para certas condições de contorno dentro de uma região R no plano- z .

Do ponto de vista de uma solução analítica para a equação de Laplace, a menos que a região R tenha uma forma muito simples, uma abordagem direta para o problema é geralmente muito difícil. No entanto, por meio do mapeamento conforme, é muitas vezes possível transformar a região R em uma região mais simples R_1 , na qual a equação de Laplace pode ser resolvida sujeita às condições de contorno também transformadas. Uma vez que a solução tenha sido obtida na região R_1 , ela pode ser levada de volta pela transformação inversa para a região R , onde se tinha o problema original. Por isso, o ponto crucial do problema é encontrar uma transformação (ou série de transformações) que irá mapear uma região R conformalmente numa região R_1 , de modo que R_1 tenha uma forma mais simples, tal como um retângulo ou um círculo.

Existem diversos tipos de transformações conforme, cada qual com sua peculiaridade, porém, serão apresentadas apenas as utilizadas para o desenvolvimento do presente trabalho.

2.2 TRANSFORMAÇÃO INVERSA

A transformação inversa $w = 1/z$ é um tipo de transformação conforme que possui a propriedade de transformar círculos em círculos, considerando linhas retas como casos de círculos degenerados. Para ilustrar essa propriedade, tem-se a equação da circunferência no plano- z ,

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \quad (1)$$

onde a, b, c , e d são números reais.

A transformação inversa especifica as relações,

$$x = \frac{\Phi}{\Phi^2 + \psi^2} \quad ; \quad y = -\frac{\psi}{\Phi^2 + \psi^2}$$

$$\Phi = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

No plano- w , a Eq. (1) é transformada na circunferência,

$$d(\Phi^2 + \psi^2) + b\Phi - c\psi + a = 0 \quad (2)$$

Se $a = 0$ na Eq. (1), a expressão representa uma reta, que pela transformação, é mapeada em uma circunferência que passa pela origem [Eq.(2)]. Além disso, qualquer circunferência que passa pela origem [$d = 0$ na Eq. (1)] será transformada em uma reta [$d = 0$ na Eq. (2)]. Assim, em resumo, a transformação inversa $w = 1/z$ leva: (1) circunferências que não passam pela origem em circunferências que também não passam pela origem, (2) circunferência que passam pela origem em retas que não passam pela origem, e (3) retas que passam pela origem em retas que também passam pela origem. Essas propriedades da transformação inversa a tornam particularmente valiosa quando se lida com o plano hodográfico.

2.3 TRANSFORMAÇÃO DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

A transformação de Schwarz-Christoffel pode ser considerada como um método de mapeamento de um polígono, que pode ser de um ou mais planos, na metade superior de outro plano. Essa transformação é de particular importância em problemas de escoamento em meio poroso.

Se um polígono está localizado no plano- z , então a transformação Schwarz-Chrsitoffel que o mapeia conformemente na parte superior do plano- t ($t = r + is$) é,

$$z = M \int \frac{dt}{(t-a)^{1-A/\pi}(t-b)^{1-B/\pi}(t-c)^{1-C/\pi} \dots} + N \quad (3)$$

onde M e N são constantes complexas, A, B, C, \dots , são os ângulos internos, em radianos, do polígono no plano- z (Fig.5a), e a, b, c, \dots ($a < b < c \dots$) são os pontos no eixo real do plano- t correspondentes aos respectivos vértices A, B, C, \dots (Fig. 5b).

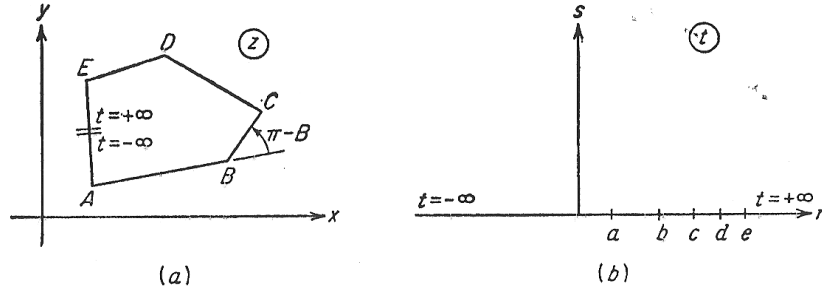


Figura 5. (a) Polígono no plano- z (b) Polígono no plano- t [4].

A transformação pode ser considerada como o mapeamento de um polígono no plano- z em um polígono similar no plano- t , de uma maneira que os lados do polígono no plano- z são estendidos através do eixo real do plano- t . Isto é conseguido pela abertura do polígono em algum ponto conveniente, por exemplo, entre os pontos A e E da Fig. 5a, e estendendo um lado para $t = -\infty$ e o outro para $t = +\infty$ (Fig. 5b). Nessa operação, os lados do polígono são posicionados em uma reta ao longo do eixo real do plano- t , se estendendo de $t = -\infty$ até $t = +\infty$. O ângulo interno do ponto de abertura no plano- z deve ser assumido como π radianos e, como pode ser verificado pela Eq. (3), não toma parte na transformação.

O ponto de abertura, no plano- z , é representado na metade superior do plano- t , por uma semicircunferência de raio infinito. Assim, na realidade, a transformação de Schwarz-Christoffel mapeia conformemente a região interior do polígono $ABC \dots$, do plano- z , no interior do polígono delimitado pelos lados ab, bc, \dots e a semicircunferência com raio infinito da parte superior do plano- t , ou, de maneira mais simples, em toda a parte superior do plano- t .

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Uma camada de glicerina com profundidade d ocupa um meio poroso homogêneo e isotrópico de permeabilidade constante, k , tendo como limite inferior uma superfície sólida impermeável e como limite superior a interface com o ar.

Um sumidouro é posicionado na origem do sistema de coordenadas do plano- z ($z = x + iy$) e produz um fluxo total Q por unidade de tempo. O plano físico é mostrado na Fig.6.

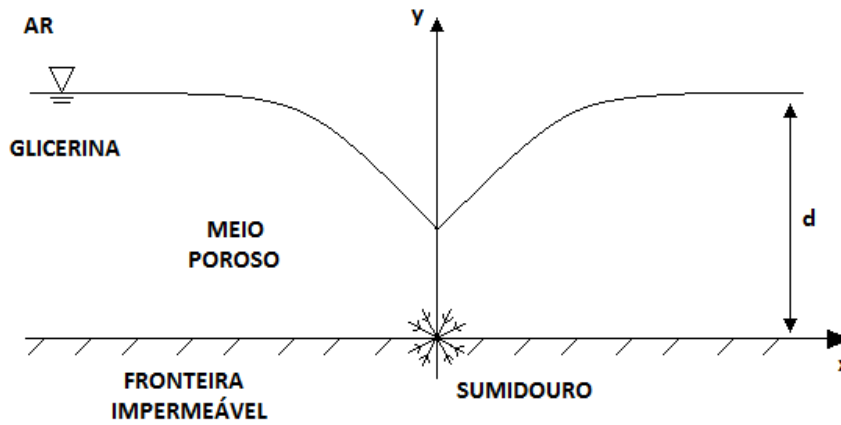


Figura 6. Plano físico.

3.2 PARÂMETRO ADIMENSIONAL

O formato da interface entre os dois fluidos é desconhecido. Nesse ponto inicial, quer-se obter um parâmetro adimensional que especifica o estado dinâmico do escoamento e permite comparação entre diferentes escoamentos com geometria semelhante. Isso é possível por meio de análise de escala das equações governantes e das condições de contorno dinâmicas na interface.

Em cada região do escoamento com fluido de viscosidade μ , densidade ρ , campo de pressão p e velocidade \mathbf{u} , assume-se que as seguintes equações (como será demonstrado posteriormente) são satisfeitas,

$$u_j = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_j}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

onde, $P = p + \rho g y$ é a pressão modificada e g é a aceleração da gravidade. Por meio de uma prática conhecida, que assume que os fluidos são separados por uma interface delgada, define-se que a equação da superfície para um escoamento em regime permanente é $y = \eta(x)$. Condições de contorno dinâmicas estabelecem continuidade do campo de pressão na interface. Em $y = \eta(x)$,

$$p^{(acima)} = p^{(abaixo)} \quad (6)$$

Em um escoamento em regime permanente, apenas o fluido extraído flui. O outro fluido permanece estacionário e sua pressão modificada desaparece. Assim, a Eq. (6), no caso da geometria adotada, torna-se:

$$g\eta(\rho_{<} - \rho_{>}) + P = 0 \quad (7)$$

onde, P representa a pressão modificada do fluido extraído, $\rho_{>}$ a densidade do fluido mais denso, e $\rho_{<}$ a densidade do fluido de menor densidade.

Utilizando-se H como escala característica de comprimento e Q/H como escala da velocidade do fluido, uma vez que a vazão é bidimensional, Eq. (4) fornece $Q\mu/k$ como escala característica de pressão, onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido extraído. A condição de contorno dinâmica, desenvolvida em Eq. (7), em função dos parâmetros adimensionais fornece,

$$\eta^* + FP^* = 0 \quad (8)$$

onde η^* e P^* são os homólogos adimensionais de η e P , respectivamente, e

$$F = \frac{Q\mu}{kH(\rho_{>} - \rho_{<})g} \quad (9)$$

é o parâmetro adimensional procurado. Ele representa a interação entre a força de sucção do sumidouro e da força gravitacional. De acordo com as hipóteses subjacentes ao modelo, F é o único parâmetro adimensional necessário para a especificação da forma da interface em estado estacionário para escoamentos geometricamente semelhantes. Ele fornece os critérios de similaridade dinâmicos para a comparação entre simulações de computador, teoria e experimentos. Deve-se enfatizar que o modelo atual não aborda o problema da estabilidade da interface.

3.3 EQUAÇÃO GOVERNANTE

Nesta seção, será abordada a formulação da lei de Darcy, assim como as devidas considerações a serem feitas para que a equação de Laplace seja considerada válida como equação governante do problema. Sabe-se que a equação de Darcy governa o movimento de fluidos em meios porosos. Em seções subsequentes, mostrar-se-ão os motivos pelos quais o modelo considerado pode ser aproximado como meio poroso similar ao idealizado por Darcy.

De acordo com [2], o experimento conduzido por Henry Darcy em 1856, ilustrado pela Figura 7, investigou o fluxo de água através de filtros de areia homogêneos, ou seja, um meio poroso homogêneo. Os experimentos mostraram que o fluxo Q é diretamente proporcional a área A da seção transversal por onde flui a água, é também diretamente proporcional à diferença entre os níveis h_1 e h_2 e, por fim, inversamente proporcional ao comprimento L indicado na figura.

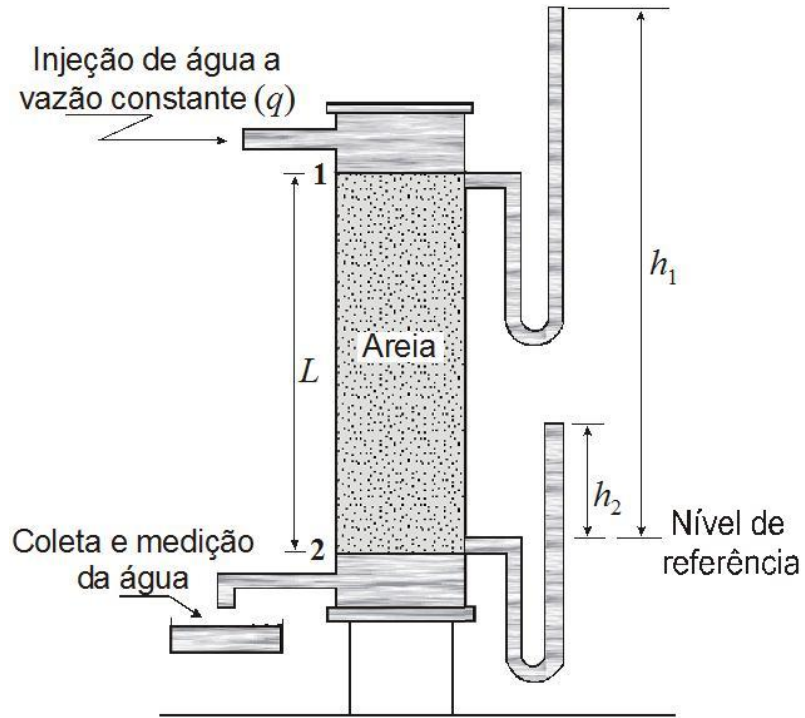


Figura 7. Esquema representativo do experimento de Darcy [2].

Assim, pode-se escrever,

$$Q = \frac{KA(h_1 - h_2)}{L} \quad (10)$$

onde, K é um coeficiente de proporcionalidade. A diferença $(h_1 - h_2)$ representa não apenas uma diferença de altura dos níveis, mas a soma da pressão e energias potenciais (em termos de metros de coluna de líquido). Pode-se substituir $(h_1 - h_2)$, portanto, por $(\varphi_1 - \varphi_2)$, onde $\varphi_i = \gamma + p_i/\gamma$. Por isso, esse termo é também chamado de altura piezométrica e a expressão $\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{L}$ é interpretada como gradiente hidráulico. Definindo-se J como o gradiente hidráulico e u como o fluxo por unidade de área da secção transversal (Q/A), que é a velocidade, têm-se,

$$u = KJ \quad (11)$$

Até aqui, a lei de Darcy, como podemos chamar a Eq. (11), é limitada a um fluxo unidirecional. Para generalizar esta lei para um fluxo tridimensional, utiliza-se a noção de gradiente, logo,

$$\mathbf{u} = K\mathbf{J} = -K \nabla\varphi \quad (12)$$

onde, \mathbf{u} e \mathbf{J} são vetores e não escalares como anteriormente. Outra observação pertinente é a de que k pode ser uma constante ou uma função de x, y e z no caso de um meio heterogêneo. Pode-se reescrever a Eq. (12) da seguinte maneira,

$$\mathbf{u} = -\nabla(K\varphi) = -\nabla\phi \quad (13)$$

onde, ϕ o potencial de velocidade. No entanto, deve-se ressaltar que essa última simplificação é válida apenas para meios porosos homogêneos ou isotrópicos. A constante de proporcionalidade K é uma função das propriedades do fluido em questão. Considerando $K = \frac{k\rho g}{\mu}$, em que k é a permeabilidade do meio poroso e μ a viscosidade dinâmica do fluido, pode-se reescrever a Eq. (12) da seguinte maneira,

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla\varphi = -\frac{k}{\mu} \nabla(\mathbf{p} + \rho g y) \quad (14)$$

Note que como g é um campo conservativo, pôde-se escrever esse termo como um gradiente de um potencial gravitacional. Em notação indicial, a Eq. (14) pode ser reescrita como,

$$u_j = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_j} [(p + \rho g y)] \quad (15)$$

Essa última expressão nos dá a velocidade de Darcy. Pode-se representar a mesma equação de outra forma,

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\mu}{k} u_j + \rho g_j \quad (16)$$

A Eq. (16) revela, de maneira bem clara, que a inércia do fluido é desprezada quando se trata da equação de movimento em meios porosos. Se em algum caso as suposições utilizadas

nesse desenvolvimento forem válidas e as forças de inércia não forem desprezíveis, a seguinte equação, que representa a lei de Darcy generalizada deve ser utilizada,

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{Du_j}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\mu}{k} u_j + \rho g_j \quad (17)$$

No entanto, existe um critério que permite avaliar se os efeitos de inércia podem ou não ser negligenciáveis através do número de Reynolds baseado na permeabilidade do meio poroso. Esse Reynolds tem origem na análise de escala dos termos viscoso e de inércia da equação de Darcy generalizada [Eq. (17)] . Vale lembrar que quando se considera a equação de Darcy, a suposição de meio poroso já foi feita. Quer-se, então, um critério para avaliar se os efeitos de inércia são ou não relevantes nesse meio.

O termo de inércia da equação de Darcy pode ser dado, em notação indicial, por $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j)$ e o termo viscoso, em módulo, por $\frac{\mu}{k} u_j$. Dividindo-se o primeiro pelo segundo, tem-se a razão entre forças de inércia e viscosas. Para o primeiro ser desprezado, deve-se obter que a razão é bem inferior a unidade. Adota-se U como escala característica de velocidade e L como de comprimento, em que L é um comprimento característico relacionado às dimensões do Hele-Shaw e não às dimensões dos poros. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j) \sim \frac{\rho U^2}{L} \quad (18)$$

$$\frac{\mu}{k} u_j \sim \frac{\mu}{k} U \quad (19)$$

Assim, dividindo-se a Eq. (18) pela Eq. (19), têm-se,

$$\frac{\left(\frac{\rho U^2}{L}\right)}{\left(\frac{\mu}{k} U\right)} = \frac{\rho U k}{\mu L} \quad (20)$$

Multiplicando a Eq. (20) por L/L , têm-se,

$$\frac{\rho U k}{\mu L} \left(\frac{L}{L} \right) = \frac{\rho U L}{\mu} \left(\frac{k}{L^2} \right) = Re \left(\frac{k}{L^2} \right) \quad (21)$$

Assim, quando $Re \left(\frac{k}{L^2} \right) \geq 1$ os termos de inércia devem ser levados em conta e a lei de Darcy não é válida e vice-versa.

Dando prosseguimento ao tópico principal (equações governantes), deve-se mencionar uma segunda equação governante do problema, a equação da continuidade, que em notação indicial é representada da seguinte forma,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (22)$$

Considerando a natureza do escoamento, a simplificação de incompressibilidade do fluido é válida e, portanto, pode-se escrever,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_i = 0 \quad (23)$$

Foi visto anteriormente [Eq. (13)] que a velocidade em meio poroso, segundo a lei de Darcy, pode ser escrita como um gradiente de um potencial ϕ . Combinando as Equações (22) e (23), obtém-se a equação governante do escoamento em meio poroso, a equação de Laplace para o potencial de velocidade,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \phi = 0 \quad (24)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (25)$$

onde,

$$\phi = -\frac{k}{\mu}(p + \rho g y) \tag{26}$$

4 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO

4.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para resolver a Eq. (25) é necessário determinar as condições de contorno para o potencial de velocidade. Como o escoamento é bidimensional e permanente, uma condição de contorno é que na interface, o potencial de velocidade é,

$$\phi = -\frac{k}{\mu}\Delta\rho gy \quad (27)$$

$$\phi = -\frac{1}{\xi_0}y$$

onde,

$$\xi_0 = \frac{\mu}{k\Delta\rho g} \quad (28)$$

pois na interface o termo associado a pressão, p , é constante e assumido como nulo. O termo $\Delta\rho$ representa a diferença entre as massas específicas dos dois fluidos imiscíveis, ar e glicerina.

Como não se sabe o formato da interface, outra condição de contorno deve ser especificada para a mesma. Sendo o escoamento incompressível e bidimensional, pode-se utilizar a função de corrente ψ , que em termos das componentes da velocidade u e v , nas direções x e y , respectivamente, é representada por,

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (29)$$

Por ser definida dessa maneira, verifica-se que a função de corrente também satisfaz a equação de Laplace,

$$\nabla^2\psi = 0 \quad (30)$$

Como o regime é permanente, a interface está parada e não existe componente da velocidade na direção normal a ela, sendo o vetor velocidade sempre tangente à mesma. Então, outra condição de contorno é que na interface a função de corrente tem valor constante, ou seja, a interface é uma linha de corrente. Por não ter essa expressão para ψ , não se sabe o formato da interface, mas é necessário determiná-la, pois ela é a solução do problema.

Pelo fato de que a interface é uma linha de corrente e utilizando um conjunto de transformações conformes, chamado de método hodográfico, pode-se transformar esse domínio físico, onde não se conhece o formato da interface, em outro domínio, onde a interface tem uma forma geométrica conhecida e mais simples, no caso uma reta.

4.2 MÉTODO HODOGRÁFICO

Considerando s como a distância e q como módulo do vetor velocidade ao longo da interface, com u e v sendo suas respectivas componentes nos eixos x e y . Por se tratar de um escoamento em regime permanente, sabe-se que a velocidade é sempre tangente à interface, então,

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (31)$$

Diferenciando a condição de contorno [Eq. (27)] em relação a s ,

$$q = \frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{1}{\xi_0} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (32)$$

Multiplcando a Eq. (32) pelo módulo do vetor velocidade,

$$q^2 = -q \frac{1}{\xi_0} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (33)$$

A componente do vetor velocidade na direção y é,

$$v = q \frac{\partial y}{\partial s} \quad (34)$$

Então, o módulo da velocidade na interface é,

$$\begin{aligned} q^2 &= u^2 + v^2 \\ -\frac{v}{\xi_0} &= u^2 + v^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Manipulando a Eq. (35),

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2\xi_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\xi_0}\right)^2 \quad (36)$$

Então no plano hodográfico, plano-w ($w = u + iv$), a interface, que tinha formato desconhecido no plano-z, é mapeada em uma circunferência passando pela origem, de diâmetro $\frac{1}{\xi_0}$ e centro no ponto $\left(0, -\frac{1}{2\xi_0}\right)$. Devido à simetria do problema, será considerado apenas a metade direita do plano-z, representado na Fig.8, e o plano-w é representado na Fig.9.

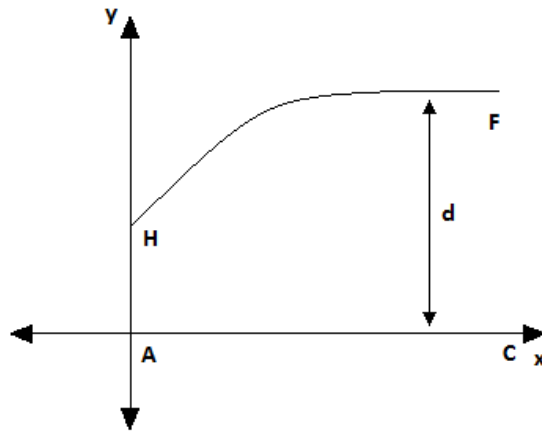


Figura 8. Plano-z.

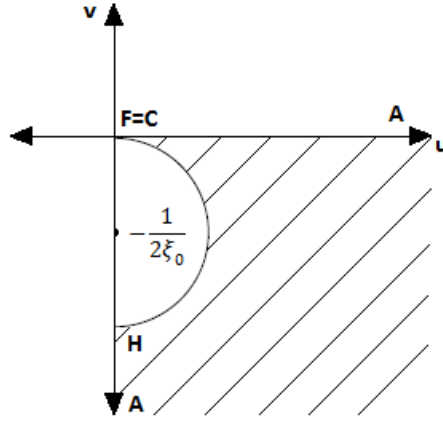


Figura 9. Plano-w.

Há uma singularidade no ponto onde está localizado o sumidouro, ponto A , onde a velocidade do escoamento se torna infinita.

Como ϕ e ψ representam, respectivamente, o potencial de velocidade e a função de corrente de um escoamento potencial bidimensional, elas se relacionam da seguinte maneira,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (37)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (38)$$

Mostrando que ϕ e ψ de um escoamento potencial bidimensional satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Ainda mais, ambos ϕ e ψ satisfazem suas equações de Laplace.

Ainda a respeito destes potenciais, sabe-se, como dito anteriormente, que a interface representa uma linha de corrente para escoamento em regime permanente. Assim, pode-se formar uma variável complexa $f = \phi + i\psi$, chamada de potencial complexo, onde a interface possui valor constante para função de corrente. Assim, é possível representar outro plano, chamado de plano-f, como ilustra a Fig. 10. A distância entre duas linhas de corrente representa uma vazão. Neste caso, a distância entre a linha que representa a interface e a linha que representa a fronteira impermeável é $\frac{Q}{2}$, pois a vazão é a mesma pelos dois lados do domínio considerado.

$$\zeta = \frac{1}{w} \quad (40)$$

Pode-se notar que a transformação especifica as relações,

$$\eta = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad ; \quad \xi = -\frac{v}{u^2 + v^2} \quad (41)$$

$$u = \frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2} \quad ; \quad v = -\frac{\xi}{\eta^2 + \xi^2} \quad (42)$$

Para determinar qual a reta do plano- ζ , a circunferência do plano- w deve ser transformada. Sabe-se que a equação de um círculo no plano- w pode ser dada por,

$$a(u^2 + v^2) + bu + cv + d = 0 \quad (43)$$

onde a , b , c , e d são números reais.

No plano- ζ , a Eq. (43) é transformada pela transformação inversa no círculo,

$$d(\eta^2 + \xi^2) + b\eta - c\xi + a = 0 \quad (44)$$

Comparando as Equações (35) e (43), encontram-se os seguintes parâmetros,

$$a = 1 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = \frac{1}{\xi_0} \quad ; \quad d = 0$$

Substituindo-os na Eq. (44), encontra-se para a interface,

$$\xi = \xi_0 \quad (45)$$

Então, por meio desta transformação conforme, a interface que tinha o formato de uma circunferência no plano- w foi mapeada em uma reta conhecida no plano- ζ , como pode ser representado na Fig. 11.

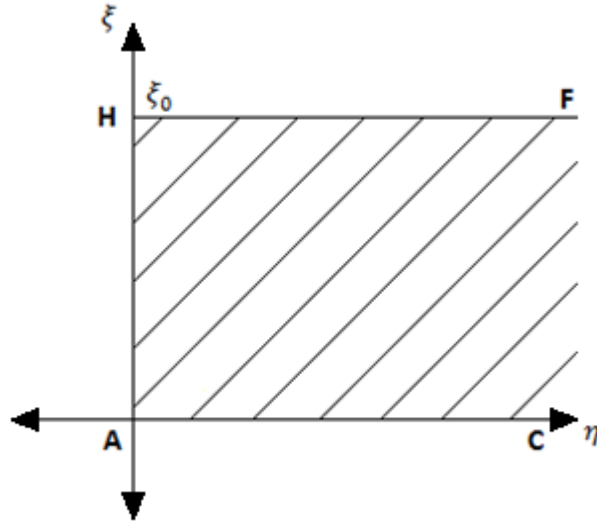


Figura 11. Plano- ζ .

Como a região do escoamento no plano- ζ e no plano- f é delimitada por um polígono, a transformação de Schwarz-Christoffel pode ser utilizada.

Considerando o polígono localizado no plano- ζ , faixa semi-infinita $FHAC$ de largura ξ_0 , que deve ser entendida como um triângulo com ângulos internos, em radianos, $\zeta_F \equiv \zeta_C = 0$, $\zeta_H = \pi/2$ e $\zeta_A = \pi/2$. Então, a transformação que o mapeia conformemente na metade superior do plano- t ($t = r + is$), chamada de transformação Schwarz-Christoffel, tem a fórmula geral,

$$\zeta = M \int \frac{dt}{(t - t_F)^{1-\frac{\zeta_F}{\pi}} (t - t_H)^{1-\frac{\zeta_H}{\pi}} (t - t_A)^{1-\frac{\zeta_A}{\pi}} (t - t_C)^{1-\frac{\zeta_C}{\pi}}} + N \quad (46)$$

onde M e N são constantes complexas, ζ_F , ζ_H , ζ_A e ζ_C são os ângulos internos, em radianos, dos respectivos vértices F , H , A e C do polígono no plano- ζ , e t_F , t_H , t_A e t_C são os pontos no eixo r do plano- t correspondentes aos respectivos vértices.

No mapeamento dos pontos C , A e H arbitrariamente nos pontos $t_C = +\infty$, $t_A = +1$ e $t_H = -1$, respectivamente, condições de simetria colocam o ponto F em $t_F = -\infty$, conforme é representado na Fig.12.

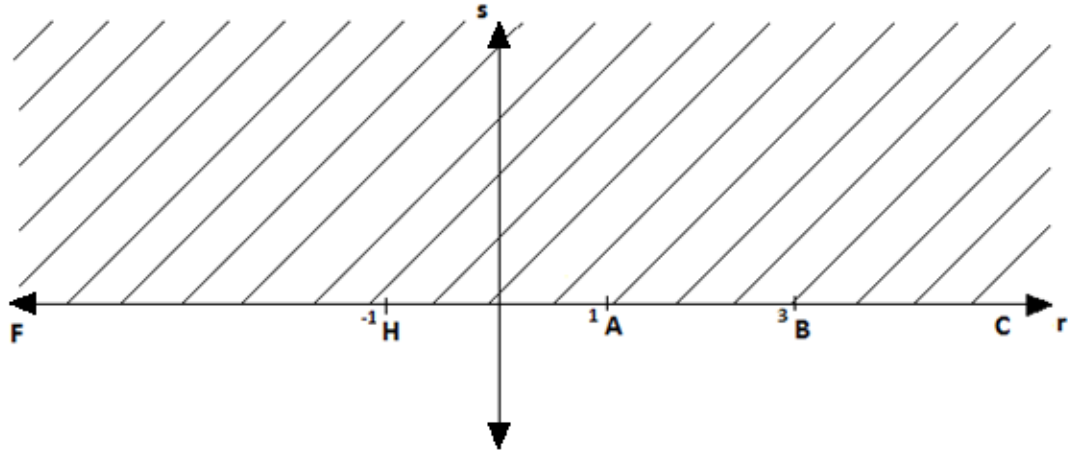


Figura 12. Plano- t.

Fazendo as devidas substituições na Eq. (46), a transformação de Schwarz-Christoffel assume a forma,

$$\zeta = M \int \frac{dt}{(t-1)^{1-\frac{\pi/2}{\pi}}(t+1)^{1-\frac{\pi/2}{\pi}}} + N$$

$$\zeta = M \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + N$$

ou,

$$\zeta = M \cosh^{-1}(t) + N \quad (47)$$

As constantes M e N podem ser determinadas pelas coordenadas dos pontos no plano- ζ e no plano- t . No ponto A , onde $\zeta = 0$ corresponde a $t = 1$, tem-se,

$$0 = M \cosh^{-1}(1) + N$$

ou,

$$N = 0$$

No ponto H , onde $\zeta = i\xi_0$ corresponde a $t = -1$, tem-se,

$$i\xi_0 = M \cosh^{-1}(-1)$$

Note que, $\cosh^{-1}(-1) = i\pi$, então,

$$i\xi_0 = Mi\pi$$

ou,

$$M = \frac{\xi_0}{\pi}$$

Portanto, a transformação desejada é,

$$\zeta = \frac{\xi_0}{\pi} \cosh^{-1}(t) \quad (48)$$

Agora, considerando o polígono localizado no plano- f , pode-se também utilizar a transformação Schwarz-Christoffel para mapeá-lo conformemente na metade superior do plano- t . Sendo esse polígono a faixa infinita $AFCA$ de largura $Q/2$, que deve ser entendida como um paralelogramo com ângulos internos, em radianos, $f_A = 0$, $f_H = \pi$, $f_F \equiv f_C = 0$ e $f_B = \pi$.

Então, a transformação de Schwarz-Christoffel que o mapeia conformemente na metade superior do plano- t tem a fórmula geral,

$$f = M \int \frac{dt}{(t - t_A)^{1-\frac{f_A}{\pi}} (t - t_H)^{1-\frac{f_H}{\pi}} (t - t_F)^{1-\frac{f_F}{\pi}} (t - t_C)^{1-\frac{f_C}{\pi}} (t - t_B)^{1-\frac{f_B}{\pi}}} + N \quad (49)$$

onde M e N são constantes complexas, f_A, f_H, f_F, f_C e f_B são os ângulos internos, em radianos, dos respectivos vértices A, H, F, C e B do polígono no plano- f , e t_A, t_H, t_F, t_C e t_B são os pontos no eixo r do plano- t correspondentes aos respectivos vértices.

No mapeamento dos pontos C , A , H e F nos pontos $t_C = +\infty$, $t_A = +1$, $t_H = -1$ e $t_F = -\infty$, respectivamente, condições de simetria colocam o ponto B em $t = +3$, conforme é representado na Fig.12.

Fazendo as devidas substituições na Eq.(49), a transformação de Schwarz-Christoffel assume a forma,

$$f = M \int \frac{dt}{(t-1)^{1-\frac{Q}{\pi}}} + N$$

$$f = M \int \frac{dt}{(t-1)^1} + N$$

ou,

$$f = M \ln(t-1) + N \quad (50)$$

As constantes M e N podem ser determinadas pelas coordenadas dos pontos no plano- f e no plano- t . No ponto B , onde $f = 0$ corresponde a $t = 3$, tem-se,

$$0 = M \ln(2) + N \quad (51)$$

No ponto H , onde $f = iQ/2$ corresponde a $t = -1$, tem-se,

$$\frac{iQ}{2} = M \ln(-2) + N \quad (52)$$

Resolvendo simultaneamente as Equações (51) e (52), determina-se,

$$M = \frac{Q}{2\pi}$$

e,

$$N = -\frac{Q}{2\pi} \ln(2)$$

Portanto, a transformação desejada é,

$$f = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{t-1}{2}\right) \quad (53)$$

Substituindo a Eq. (39) na Eq. (40) e diferenciando-a em relação a t ,

$$\frac{dz}{dt} = \zeta \frac{df}{dt} \quad (54)$$

Diferenciando a Eq. (53) em relação a t ,

$$\frac{df}{dt} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{(t-1)} \quad (55)$$

Substituindo as Equações (48) e (55) na Eq. (54), pode-se expressar z em termos de t ,

$$dz = \frac{Q\xi_0}{2\pi^2} \frac{\cosh^{-1}(t)}{(t-1)} dt \quad (56)$$

Uma vez que as transformações conformes de mapeamento do plano- f e do plano- ζ para o plano- z foram encontradas, a Eq. (56) pode ser integrada para dar o formato da interface no plano físico. Esta é a essência do método hodográfico.

O formato da interface \overline{HF} é encontrado integrando a Eq. (56) no intervalo $-\infty \leq t \leq -1$, pois esse é o intervalo que representa a interface no plano- t . No entanto, como a integral da Eq. (56) não converge nesse intervalo, foi calculada a integral indefinida da Eq. (56) [Eq. (57)] e o resultado plotado nesse mesmo intervalo.

$$\frac{z}{Q\xi_0} = \frac{\cosh^{-1}(t) [\cosh^{-1}(t) + 4 \ln(1 - e^{-\cosh^{-1}(t)})] - 4Li_2(e^{-\cosh^{-1}(t)})}{4\pi^2} + C \quad (57)$$

onde C é uma constante de integração e Li_2 é a função polilogarítmica de segunda ordem ou dilogarítmico.

A constante C pode ser determinada fazendo as devidas substituições na Eq. (57) das coordenadas do ponto A no plano- z e no plano- t , isto é $z = 0$ e $t = 1$, então,

$$0 = \frac{\cosh^{-1}(1) [\cosh^{-1}(1) + 4 \ln(1 - e^{-\cosh^{-1}(1)})] - 4Li_2(e^{-\cosh^{-1}(1)})}{4\pi^2} + C$$

Sabe-se que $\cosh^{-1}(1) = 0$ e, segundo Abramowitz e Stegun [1], $Li_2(1) = \pi^2/6$, então,

$$C = \frac{1}{6}$$

Portanto, substituindo o valor da constante na Eq.(57), tem-se,

$$\frac{z}{Q\xi_0} = \frac{\cosh^{-1}(t) [\cosh^{-1}(t) + 4 \ln(1 - e^{-\cosh^{-1}(t)})] - 4Li_2(e^{-\cosh^{-1}(t)})}{4\pi^2} + \frac{1}{6} \quad (58)$$

É importante ressaltar que o resultado da integral possui parte real e parte imaginária. Foi-se necessária uma parametrização para gerar a interface. A Eq. (58) também pode ser escrita em função do parâmetro adimensional derivado na formulação problema. Aplicando-se a definição de ξ_0 e multiplicando-se o lado esquerdo da equação por um comprimento característico H , tem-se,

$$\frac{z}{Q\xi_0} = \frac{z}{Q} \left(\frac{k\Delta\rho g}{\mu} \right) \frac{H}{H} = z^* \left(\frac{k\Delta\rho g}{Q\mu} \right) = \frac{z^*}{F} \quad (59)$$

Assim, pode-se reescrever,

$$\frac{z^*}{F} = \frac{\cosh^{-1}(t) [\cosh^{-1}(t) + 4 \ln(1 - e^{-\cosh^{-1}(t)})] - 4Li_2(e^{-\cosh^{-1}(t)})}{4\pi^2} + \frac{1}{6} \quad (60)$$

Essa última equação revela que se pode relacionar um F crítico correspondente a vazão bidimensional crítica Q associada à certa geometria. A Figura 13 mostra a interface calculada no plano- z , com os eixos normalizados pelo fator $\xi_0 Q$.

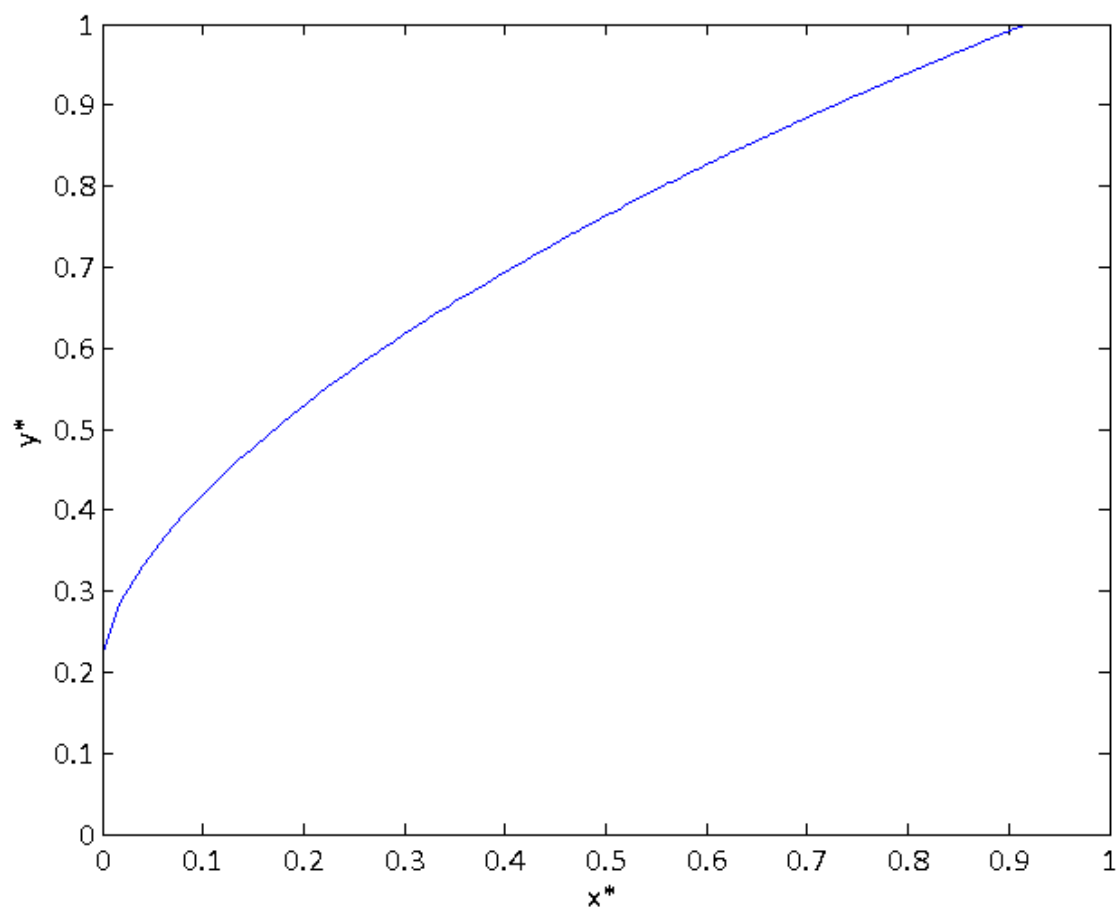


Figura 13. Interface calculada no plano-z.

5 MÉTODO ITERATIVO

A utilidade da Eq. (58) que representa a interface do cone para casos críticos é extremamente interessante para a análise do fenômeno do cone de água. Utilizando-se ainda outra abordagem, a mesma expressão pode ser ainda mais útil. O objetivo do método iterativo criado é, para uma dada geometria do reservatório, obter a vazão crítica correspondente, ou seja, inicialmente fornecer-se-á o nível do líquido e a largura do reservatório e, assim, pode-se obter a vazão crítica para esse caso.

Na função analisada, tem-se que $z(Q, t) = x + iy$, onde x e y também são funções de Q e t . Ou seja, duas variáveis devem ser iteradas para que sejam obtidos o x e o y requeridos. Para isso lançou-se mão do método de Newton-Raphson generalizado, que nada mais é do que o método de Newton-Raphson para n variáveis. A implementação do método revelou que a iteração, para algumas geometrias, diverge, não sendo possível obter a vazão crítica. Por isso, foi implementado um método próprio, onde os valores iterados convergiram para qualquer geometria. O método será abordado na Seção 5.2.

5.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON GENERALIZADO

O método de Newton-Raphson generalizado consiste em solucionar o seguinte sistema de equações,

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \dots, \xi_r) &= 0 \\ &\vdots \\ f_r(\xi_1, \dots, \xi_r) &= 0 \end{aligned} \tag{61}$$

O mesmo sistema, utilizando-se uma notação mais compacta pode ser reescrito como,

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = [f_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, f_r(\boldsymbol{\xi})] \tag{62}$$

No caso em estudo, isto é, para a interface do sistema, \mathbf{f} representa a função complexa $\mathbf{z} = [X; Y]$, ou seja, $f_1 = X$, que representa a parte real de \mathbf{z} , e $f_2 = Y$, que representa a parte imaginária de \mathbf{z} , e $\boldsymbol{\xi}$ representa as variáveis Q e t , ou seja, $[Q, t]$. Procura-se o valor $\boldsymbol{\xi}^{req}$, tal que $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}^{req}) = 0$. O processo iterativo para se obter a solução $\boldsymbol{\xi}^{req}$ começa com um proposta

inicial $\xi_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_r^0)$ para o vetor de soluções. A sequência de soluções iteradas $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ é gerada fazendo,

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \delta_k \quad (63)$$

em que δ_k é o vetor solução do sistema de equações lineares,

$$J(\xi_k)\delta_k = -f(\xi_k) \quad (64)$$

ou seja,

$$\delta_k = -J^{-1}(\xi_k)f(\xi_k) \quad (65)$$

em que J^{-1} denota a inversa da matriz Jacobiana J , que é o objeto central do método iterativo de Newton-Raphson e é definida por,

$$J_{ij}(\xi) = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}, \quad i, j = 1, \dots, r \quad (66)$$

Se a proposta inicial ξ_0 for suficientemente próxima da solução ξ^{req} , então o método iterativo converge para a solução do sistema, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi^{req}$$

A rotina da iteração pelo método de Newton-Raphson generalizado, feita em MatLab, encontra-se no Anexo 5.

5.2 MÉTODO ALTERNATIVO

Após a implementação do método de Newton-Raphson e a verificação da não convergência dos resultados para certas geometrias, principalmente quando a razão entre a largura e a altura do reservatório é muito grande, implementou-se um novo método.

A nova tentativa baseou-se no fato de que a geometria e o comportamento da solução são, a princípio, parcialmente conhecidos. Sabe-se que t está relacionado fortemente com a coordenada x , uma vez que $t = -1$ significa $x = 0$ e $t = -\infty$ indica $x = \infty$. Sabe-se também que Q está fortemente relacionada com a altura de nível. Tem-se ciência de que x não é independente de Q , nem y é independente de t .

A iteração, nesse caso, é feita de modo que t é iterado proporcionalmente a diferença entre o x calculado na x -ésima iteração e o x requerido na entrada do programa. Seguindo o mesmo raciocínio, Q é iterado proporcionalmente a diferença entre o y calculado na y -ésima iteração e o y requerido na entrada do programa. Para algumas geometrias, este método de iteração não apresenta convergência tão rápida quanto o método de Newton-Raphson, mas converge para qualquer geometria requerida e, com os computadores atuais, o seu maior custo computacional não reflete em um custo real relevante.

A rotina da iteração pelo método alternativo, feita em MatLab, também encontra-se no Anexo 6.

6 CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA: ANALOGIA ENTRE TEORIA E EXPERIMENTO

Nas seções seguintes, tanto na parte numérica, quanto na parte experimental, será necessário utilizar uma determinada condutividade hidráulica característica do meio poroso que está sendo analisado. Para isso, segundo [2], pode-se apresentar uma relação entre a distância entre as placas paralelas, as propriedades do fluido e a condutividade hidráulica do meio.

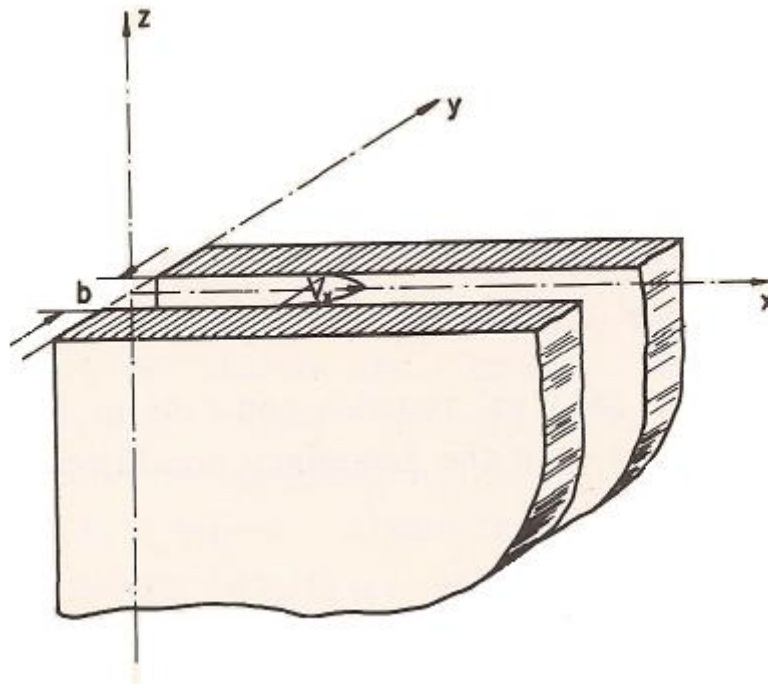


Figura 14. Placas verticais paralelas [2].

Considerando o escoamento entre duas placas verticais paralelas, como mostrado na Figura 14. As equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso incompressível podem ser escritas da seguinte maneira,

$$\frac{DU_x}{Dt} = f_x - \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 U_x \quad (67)$$

$$\frac{DU_y}{Dt} = f_y - \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 U_y \quad (68)$$

$$\frac{DU_z}{Dt} = f_z - \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 U_z \quad (69)$$

onde $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ representa a derivada hidrodinâmica, U_x , U_y e U_z são as componentes da velocidade nas direções x , y e z , respectivamente, ν é a viscosidade cinemática e f_x , f_y e f_z são as componentes de uma força externa por unidade de massa atuante no líquido.

Para um líquido fluindo no estreito espaço vertical b , tem-se $U_y = 0$. Em escoamentos muito lentos ou em fluidos com viscosidade muito elevada, as forças viscosas são consideravelmente maiores do que as forças inerciais. Se um escoamento é assumido ocorrer entre as placas, pode-se desprezar os termos de inércia, que representam a parte esquerda das Eq. (67), (68) e (69). A única força de campo ativa é a gravidade, cujo potencial é gz , então $f_x = -\frac{\partial(gz)}{\partial x} = 0$, $f_y = -\frac{\partial(gz)}{\partial y} = 0$ e $f_z = -\frac{\partial(gz)}{\partial z} = -g$. Uma vez que o líquido gruda nas placas, os gradientes de velocidade na direção y são muito maiores do que aqueles nas direções x e z . Assim, pode-se desprezar $\frac{\partial U_x}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}$, $\frac{\partial U_z}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2}$, quando comparados com $\frac{\partial U_x}{\partial y}$, $\frac{\partial U_z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2}$. Com essas considerações, as Equações (67), (68) e (69) se tornam,

$$\frac{\partial(p + \gamma z)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \quad (70)$$

$$\frac{\partial(p + \gamma z)}{\partial y} = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial(p + \gamma z)}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} \quad (72)$$

Da Equação (71), tem-se que $(p + \gamma z)$ permanece constante na direção y . Integrando as Equações (70) e (72) com as condições de contorno: $y = 0$, $\frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{\partial U_z}{\partial y} = 0$, obtém-se,

$$y \frac{\partial(p + \gamma z)}{\partial x} = \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} \quad (73)$$

$$y \frac{\partial(p + \gamma z)}{\partial z} = \mu \frac{\partial U_z}{\partial y} \quad (74)$$

Integrando novamente, com a condição de contorno de aderência nas paredes, isto é, para $y = \pm b/2$, $U_x = U_z = 0$, obtém-se,

$$U_x = \frac{1}{2\mu} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma z) \quad (75)$$

$$U_z = \frac{1}{2\mu} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma z) \quad (76)$$

Definindo o potencial $\emptyset = -\frac{\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)(p + \gamma z)}{2\mu}$, então as Equações (75) e (76) se tornam,

$$U_x = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x} \quad (77)$$

$$U_z = -\frac{\partial \emptyset}{\partial z} \quad (78)$$

o que significa que \emptyset é um potencial de velocidade, para U_x e U_z , que depende de y . Integrando as Equações (75) e (76), obtém-se a vazão específica no espaço intermédio entre as placas, nas direções x e z , respectivamente,

$$q_x = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} U_x(y) dy = -\frac{b^2 \gamma}{12 \mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \quad (79)$$

$$q_z = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} U_z(y) dy = -\frac{b^2 \gamma}{12 \mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \quad (80)$$

Introduzindo a altura piezométrica: $\varphi = z + \frac{p}{\gamma}$, e a condutividade hidráulica do espaço entre as placas, $K_m = \frac{1}{12} g(b^2/\nu)$, as Equações (79) e (80) se tornam,

$$q_x = -K_m \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (81)$$

$$q_z = -K_m \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (82)$$

Assim, tem-se um escoamento potencial com respeito ao vetor de vazão específica \mathbf{q} . As Equações (81) e (82) podem ser escritas na seguinte forma,

$$\mathbf{q} = -K_m \nabla \varphi \tag{83}$$

A analogia entre a Eq. (83) e a Lei de Darcy é óbvia. A equação da Continuidade levará a $\nabla^2 \varphi = 0$, que é análoga a equação de Laplace.

7 MÉTODO NUMÉRICO

Ainda que não seja o objetivo do trabalho realizado, faz-se necessário uma breve explanação do método numérico utilizado no programa desenvolvido [9], pois tal rotina foi utilizada em nossos trabalhos para dimensionamento do aparato experimental e para comparação com métodos analíticos, além de permitir, com as devidas considerações, comparação futura com o experimento da célula de Hele-Shaw.

Em geral, recorre-se a métodos numéricos quando algum problema possui abordagem matemática complexa e uma solução analítica para o caso não é possível ou é possível desde que muitas simplificações sejam feitas, o que prejudica a interpretação dos resultados. Tais problemas envolvem, em geral, modelagem por equações diferenciais que caracterizam sua complexidade. Desta maneira, o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) são bastante conhecidos e utilizados atualmente. As desvantagens de tais metodologias estão na exigência da discretização do domínio ou do contorno do problema modelado e, conseqüentemente, na grande quantidade de cálculos exigidos para a solução dos sistemas de equações diferenciais, o que exige elevada capacidade de processamento de dados.

No nosso caso em particular, foi utilizado o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Neste método em particular, segundo [6], equações diferenciais governantes são transformadas em equações integrais equivalentes. Por meio de equações relacionadas ao teorema de Gauss-Green e ao teorema da divergência, essas equações são então transformadas em integrais, conhecidas como integrais de contorno. A última transformação realizada envolve soluções já conhecidas da equação diferencial inicial, sendo considerado algum caso especial para geometria e condições de contorno. Por fim, as equações integrais de contorno são aproximadas por um conjunto de equações integrais discretizadas, onde a resposta da superfície para um conjunto finito de nodos é utilizada. Entre os nodos, encontram-se os elementos de contorno. A resposta para os pontos internos do domínio, ou seja, no interior dos elementos de contorno, é dada por simples interpolação. Deste modo, somente o contorno precisa ser subdividido, portanto a dimensão do problema fica reduzida em uma dimensão. Esse método numérico encontra grandes aplicações em diferentes áreas, como análise de tensões, acústica, eletromagnetismo e fluxo potencial. Esta última é de grande interesse, pois se encaixa em nosso problema. Como visto anteriormente, a equação governante do problema do escoamento bifásico em meio poroso é a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (25)$$

A equação, juntamente com as condições de contorno relativas ao problema, permite a utilização do MEC para solucionar o problema simplificado. A rotina do método numérico utilizada nos permite avaliar resultados para diversas geometrias. A primeira aplicação do programa no presente trabalho foi a de servir como parâmetro para comparação com [12]. Além da geometria, evidenciada na Fig. 15, vários outros parâmetros são fornecidos ao programa, como o valor da pressão negativa no ponto de extração, o tempo de funcionamento do experimento e da bomba, a permeabilidade do meio, dentre outros. Após uma determinada simulação, o programa nos fornece um gráfico, como mostrado na Fig. 16. O gráfico nos revela o fluxo total em função do tempo nas laterais do domínio para que o nível se mantenha constante. Quando os parâmetros corretos são fornecidos, tal fluxo se estabiliza após um determinado intervalo de tempo. Quando a depressão na bomba ou o tempo de funcionamento são incompatíveis, o gráfico apresenta-se maneira distorcida, o que requer novas iterações.

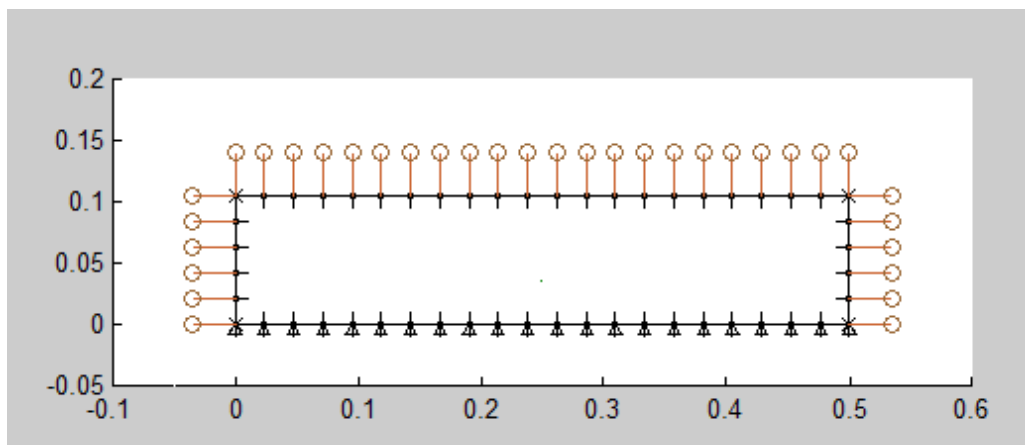


Figura 15. Geometria simulada para comparação com [12].

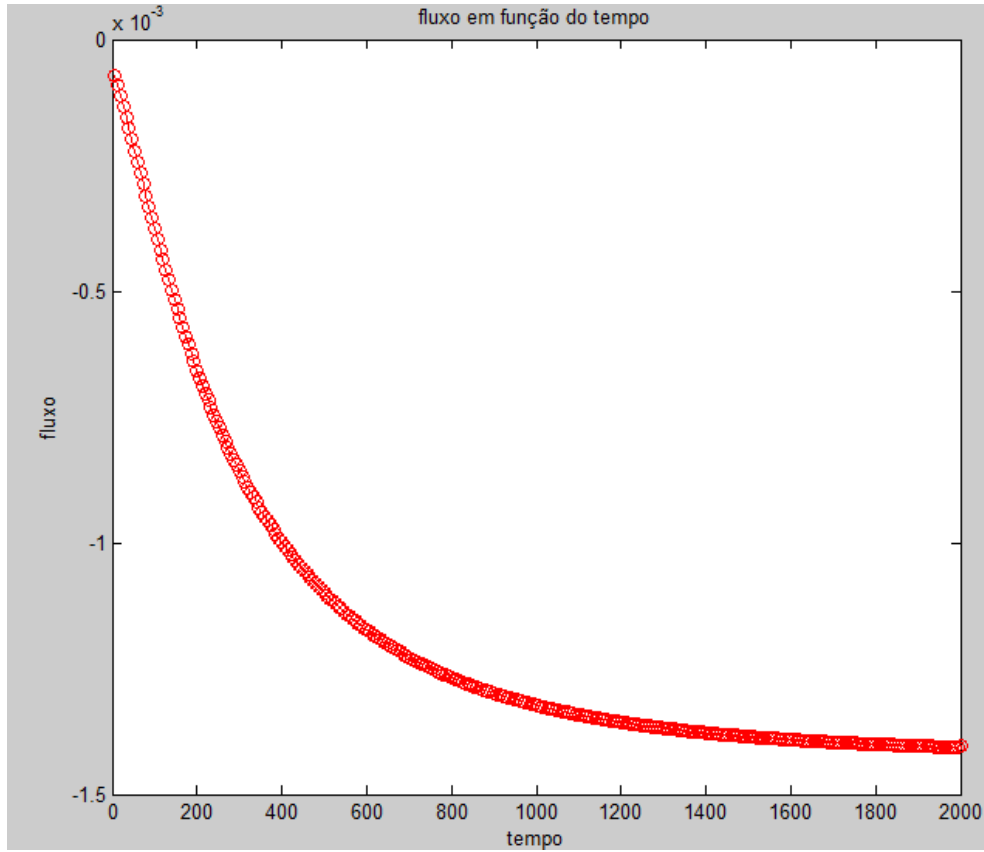


Figura 16. Fluxo nas laterais do domínio em função do tempo.

O trabalho [12] faz comparações entre um modelo analítico por ele proposto e experimentos em célula de Hele-Shaw para os mesmos casos. O estudo do caso 2, cujas propriedades do fluido e parâmetros do experimento são: $\rho = 1,255 \text{ g/ml}$, $\mu = 1025,5 \text{ cp}$, $d = 10,5 \text{ cm}$ e $K = 0,00399 \text{ m/s}$, tem como resultado experimental uma vazão crítica de $10,0 \text{ ml/min}$ para bombeamento contínuo. É importante mencionar que d , como ilustrado na Fig. 6 representa profundidade do sumidouro, do ponto de extração, em relação à interface ar-glicerina e que K é a condutividade hidráulica. A partir da relação apresentada no Capítulo 6, sabe-se que,

$$K = \frac{\rho g b^2}{12\mu} \quad (84)$$

As mesmas propriedades e os mesmos parâmetros foram aplicados ao programa aqui analisado, sendo que a condutividade hidráulica foi estimada pela Eq. (84). A vazão crítica encontrada foi de $10,62 \text{ ml/min}$, o que representa uma variação de 6,2 %. Como base para comparação, considerando este mesmo caso, a variação encontrada em [12] entre o valor experimental e o analítico foi de 5,2 %. Em função da pequena discordância entre o resultado

experimental e o numérico, este foi utilizado para estimar a vazão das bombas a serem utilizadas em nossa célula de Hele-Shaw. As estimativas para as vazões encontradas e mais detalhes a respeito do projeto e dimensionamento do aparato experimental estão explicitadas no Capítulo 8.

8 APARATO EXPERIMENTAL

O termo célula de Hele-Shaw tem origem no trabalho de Henry Selby Hele-Shaw (1854-1941), engenheiro naval que trabalhou no Departamento de Engenharia da Universidade de Liverpool. Inicialmente, o termo relacionava-se à simulação de um fluxo líquido em um tubo ou em uma canaleta com lados molhados. Posteriormente, e mais semelhante à concepção atual, a célula de Hele-Shaw ficou conhecida como um aparato em que um fluido viscoso ocupa um determinado domínio, encontrando-se entre duas placas de área delimitada e o líquido pode ser injetado ou removido através de um ponto.

O modelo do aparato a ser utilizado em nosso experimento, representado pela Fig. 17, consistirá em uma célula de Hele-Shaw, cujo fluido viscoso localizado na parte inferior será a glicerina, que formará uma interface bifásica com o ar, localizado na parte superior do aparato. Duas placas paralelas de acrílico serão separadas por espaçadores, que manterão uma distância de 4 mm entre elas. No centro da célula, localizar-se-ão três furos, onde uma bomba dosadora será conectada a um deles para a retirada de glicerina. Existirão ainda dois tanques laterais, cujos objetivos são de manter o nível de glicerina constante à medida que essa é retirada pelo furo central. Esse trabalho também será feito por bombas dosadoras, que recebem sinais de sensores ultra-sônicos, localizados acima dos tanques laterais.



Figura 17. Modelo do experimento [12].

Como mencionado no Capítulo 7, para o dimensionamento das bombas dosadoras, foi utilizado o programa, cujo método numérico é o de elementos de contorno, desenvolvido em

[9]. A geometria escolhida para a célula de Hele-Shaw foi de 2 *m* de largura e 50 *cm* de altura. A espessura será determinada por dois fatores limitantes. O primeiro é a capacidade, em vazão, das bombas dosadoras mais comuns no mercado, ou seja, a vazão crítica deveria ser pequena e, portanto a espessura também, como será mostrado adiante. Além disso, quanto maior a espessura entre as placas, menores são os erros percentuais de planicidade referentes às placas de acrílico idealizadas como paralelas.

Partiu-se então para simulações com a geometria proposta e variou-se a espessura de 2 *mm* a 10 *mm*. Após sucessivas iterações, os valores encontrados, são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Simulações para a geometria proposta para diferentes espessuras.

Espessura (mm)	Vazão (L/h)
2	4,7
3	15,8
4	37,5
5	73,3
10	585,6

As bombas dosadoras eletromagnéticas de maior vazão são bombas entre 80 e 100 *L/h*. Por isso, optou-se por uma espessura de 4 *mm*, uma vez que a vazão necessária para um espaçamento de 5 *mm* não garante boa margem de segurança. Além disso, bombas dosadoras especificadas para altas vazões não garantem precisão para vazões abaixo de 10% da vazão máxima. Como se quer futuramente analisar o comportamento do cone para diferentes alturas de nível e, conseqüentemente, para diferentes vazões, não seria economicamente viável escolher espessura de 5 *mm*. Nesse ponto, é interessante ressaltar que a seleção do tipo de bomba foi feita com base no fato de que as bombas dosadoras permitem vazões constantes com grande confiabilidade.

8.1 EQUAÇÕES DO HELE-SHAW POR APROXIMAÇÃO DE FILME DELGADO

Utilizou-se o número de Reynolds para caracterizar o escoamento e certificar que as forças inerciais são muito menores em comparação com as viscosas. Um ponto negativo deste método é a incerteza relacionada a velocidade máxima existente na célula. Por isso e também para

completar o estudo, desenvolve-se a seguir, por meio de análise de escala, uma demonstração de que na célula de Hele-Shaw, as forças inerciais podem ser desprezadas.

Para realizar tal estudo, deve-se retomar a equação de Navier-Stokes, utilizada para descrever o escoamento de fluidos.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \rho g_j \quad (85)$$

O que deve ser demonstrado nesse estudo é que o termo $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j)$, que representa as forças inerciais envolvidas, é desprezível em comparação com o termo $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, que trata das forças viscosas. Para introduzir esta análise, torna-se necessário definir escalas características para o caso da célula de Hele-Shaw. A Fig. 18 define tais parâmetros e os eixos de coordenadas utilizados. Adota-se U para velocidade característica e L e h para escalas características de comprimento e espessura respectivamente. Uma suposição para esta demonstração é que $h \ll L$, ou seja, a espessura entre as placas é muito menor que o comprimento.

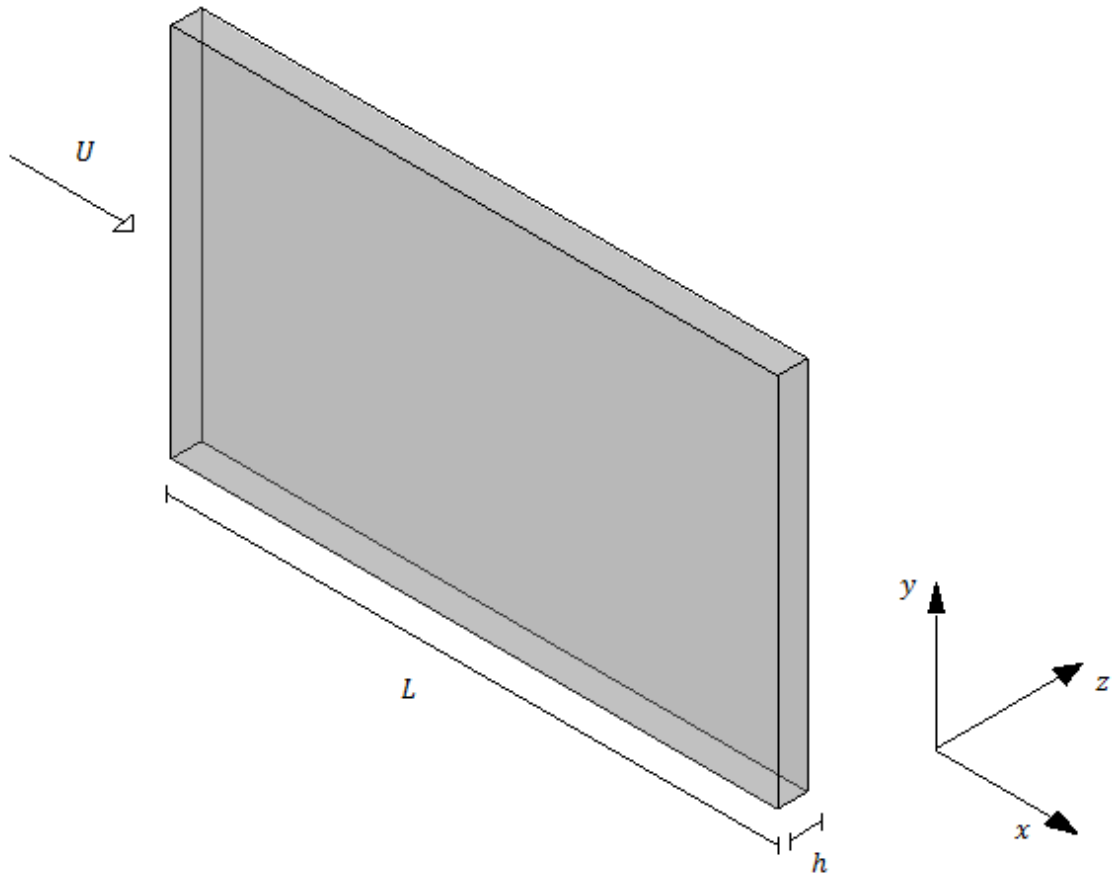


Figura 18 – Escalas características para o escoamento na célula de Hele-Shaw.

Primeiramente, vamos analisar o termo viscoso da equação. Sabe-se que existem condições de não escorregamento nas paredes da placa. Isso quer dizer que para $z = 0$ e $z = h$, a velocidade do fluido é nula. Então, ao longo da espessura h , a velocidade sofre variação de ordem U . Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \sim \frac{U}{h}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, os gradientes de velocidade em x e y são,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \sim \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \sim \frac{U}{L}$$

Portanto, os gradientes ao longo dessas direções são muito mais fracos que os em z . Assim, pode-se reescrever o termo viscoso da equação de Navier-Stokes como,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \cong \mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \quad (86)$$

Utilizando as devidas escalas características, temos que:

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \sim \frac{\mu U}{h^2} \quad (87)$$

Aplica-se, então, raciocínio semelhante para o termo de inércia e chega-se a seguinte expressão,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j) \sim \frac{\rho U^2}{L} \quad (88)$$

Como o objetivo é provar que as forças inerciais são irrelevantes em relação as viscosas, calcula-se a razão entre as Equações (88) e (87).

$$\frac{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\mu \nabla^2 \mathbf{u}|} \sim \frac{\frac{\rho U^2}{L}}{\frac{\mu U}{h^2}} = \frac{\rho U h^2}{\mu L}$$

Multiplicando por L/L , tem-se,

$$\frac{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\mu \nabla^2 \mathbf{u}|} \sim \frac{\rho U L}{\mu} \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

ou

$$\frac{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\mu \nabla^2 \mathbf{u}|} \sim Re \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

Então, o termo $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ pode ser desprezado se,

$$Re \left(\frac{h}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (89)$$

É importante notar que o número de Reynolds não precisa ser pequeno, desde que h/L seja pequeno o suficiente para garantir essa condição.

Como na célula de Hele-Shaw $h \ll L$, o termo obtido satisfaz a relação e, portanto, as forças de inércia podem ser desprezadas.

8.2 ESTIMATIVA DO NÚMERO DE REYNOLDS

Um aspecto interessante de se ressaltar é a validade da lei de Darcy para o experimento proposto. Tal lei, proveniente de simplificações da equação de Navier-Stokes, pressupõe que as forças inerciais são pequenas em relação às forças viscosas inerentes. Para isso, deve-se calcular o número de Reynolds do escoamento entre as placas. No caso da célula de Hele-Shaw, devido ao confinamento do fluido entre as placas paralelas, o número de Reynolds padrão não reflete a rigor o número de Reynolds destes formatos bidimensionais. Por isso, utilizar-se-á a Eq. (89) para fazer essa estimativa. A velocidade característica utilizada para o cálculo é dada pela vazão crítica $V_{critica}$ dividida por um comprimento característico, nesse caso a altura do nível no Hele-Shaw. Assim,

$$Re \left(\frac{h}{L} \right)^2 = 1,28 \times 10^{-6} \quad (90)$$

Tendo em vista o significado físico do número de Reynolds, ou seja, a razão entre forças inerciais e viscosas, conclui-se que as forças inerciais são desprezíveis em nosso caso, o que valida a lei de Darcy para o problema e, conseqüentemente, o experimento em si.

Os desenhos técnicos relativos ao aparato experimental encontram-se nos Anexos I, II, III e IV.

9 RESULTADOS

Tendo em vista o objetivo final deste trabalho, pode-se aqui detalhar e comparar os resultados analíticos e numéricos obtidos. É importante ressaltar que em ambos os métodos foi considerado o caso bidimensional e em regime permanente. Em cada um dos métodos obteve-se o formato da interface ar-glicerina e a vazão crítica. A vazão crítica, que é a maior taxa de bombeamento contínuo, acima do qual o fluido indesejado é produzido, foi calculada pelo método numérico e também calculada analiticamente pelo método iterativo, diferentemente dos resultados obtidos no relatório parcial.

No relatório parcial, a vazão crítica foi obtida apenas pelo método numérico e, essa vazão, era utilizada no método analítico como dado de entrada para gerar o formato da interface. Também é bom lembrar que não se conseguia obter a vazão crítica para dada geometria pelo método analítico. Outro avanço obtido em relação ao relatório parcial foi a extrapolação do gráfico referente ao método numérico, por meio da utilização da solução do método analítico, na região próxima ao *cusp*. Optou-se por essa extrapolação em vez de refinar ainda mais a malha, como havia sido proposto no relatório parcial, visto que, o modelo analítico representa muito bem o comportamento da interface obtida pelo modelo numérico, além da economia referente ao custo computacional.

9.1 VAZÃO CRÍTICA

A vazão crítica para diferentes geometrias foi obtida pelo método numérico e pelo método analítico. Foram simulados diferentes casos que podem ser obtidos de acordo com a geometria referente a célula de Hele-Shaw, que será utilizada como aparato experimental. Como a célula de Hele-Shaw terá as dimensões de 2 m de largura, 50 cm de altura e 4 mm de espessura, a única dimensão que pode-se variar é a altura correspondente ao nível do fluido, H . A altura do nível foi variada de 10 cm até 50 cm, variando de 5 em 5 cm. Assim, foi possível analisar quase todos os cenários possíveis do experimento. Os resultados numéricos e analíticos, bem como os erros relativos entre os métodos para cada caso, são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2. Comparação entre as vazões críticas analíticas e numéricas para diferentes geometrias do Hele-Shaw.

H (cm)	Vazão crítica (L/h)		Erro relativo (%)
	Numérico	Analítico	
10	2,22	2,31	4,05%
15	5,11	5,18	1,37%
20	9,18	9,18	0,00%
25	14,53	14,31	-1,51%
30	20,92	20,57	-1,67%
35	28,51	27,93	-2,03%
40	37,25	36,37	-2,36%
45	47,19	45,87	-2,80%
50	58,28	56,42	-3,19%

É importante ressaltar que os valores obtidos pelo método numérico possuem incerteza intrínseca devido à natureza do método iterativo, que é feito de maneira manual, utilizado para determinar a máxima vazão de bombeamento sem que haja a produção do fluido indesejado. Além dessa incerteza associada à iteração, há também os erros inerentes à discretização e simulação numérica. Nos casos simulados, utilizou-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) com malha de 92 elementos. O refinamento da vazão crítica poderia ser ainda maior e os erros percentuais alterados, o que não implicaria necessariamente que seriam menores.

Em [12], os erros percentuais encontrados entre os métodos analítico e experimental foram de 5 a 6%. Assim, como o maior erro percentual encontrado (Tabela 2) foi da ordem de 4%, consideram-se aceitáveis.

9.2 FORMATO DA INTERFACE

As interfaces geradas pelos métodos analítico e numérico para os casos de altura H , que representa a altura do nível do fluido, iguais a 30, 40 e 50 cm , são apresentadas nas Figuras 19, 20 e 21, respectivamente. Os casos em que H é igual a 10 e 20 cm não foram apresentados, uma vez que para esses valores, os parâmetros t da equação da interface foi de 10^{27} e de 10^{13} , respectivamente, nas proximidades da coordenada $x = 2\text{ m}$. Isso implica em um altíssimo custo computacional, sendo necessários computadores de altíssimo desempenho.

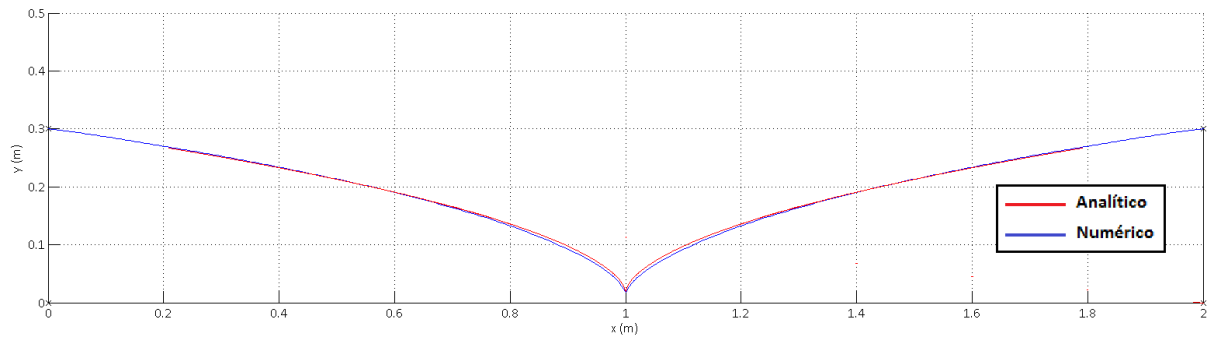


Figura 19. Comparação das posições das interfaces obtidas pelo modelo numérico e pelo modelo analítico para geometria (2 m x 0,3 m).

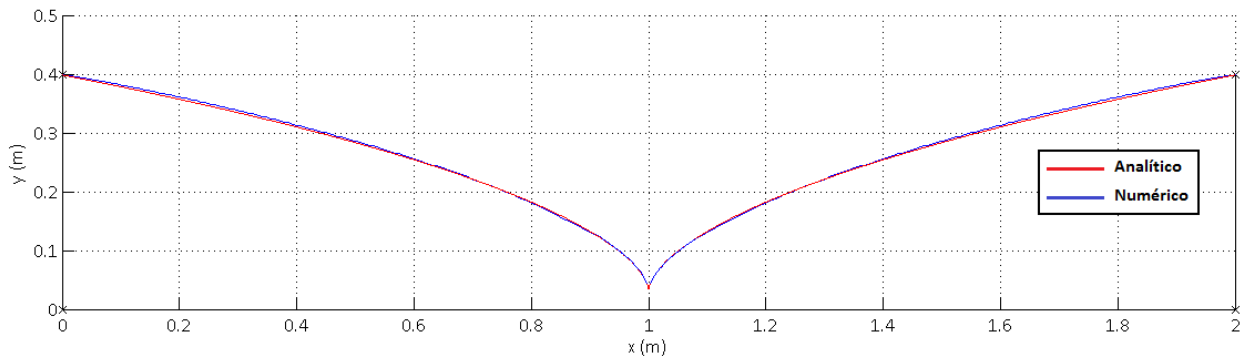


Figura 20. Comparação das posições das interfaces obtidas pelo modelo numérico e pelo modelo analítico para geometria (2 m x 0,4 m).

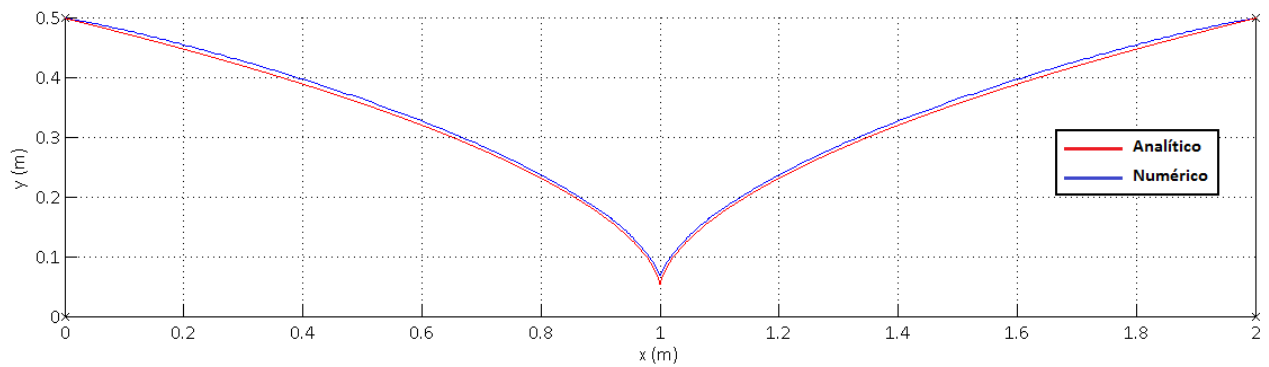


Figura 21. Comparação das posições das interfaces obtidas pelo modelo numérico e pelo modelo analítico para geometria (2 m x 0,5 m).

Como se pode notar, os formatos das interfaces dos modelos analíticos e numéricos, nos três casos analisados, são muito semelhantes. É importante ressaltar que o gráfico do modelo numérico foi extrapolado, nas proximidades do *cusp* ($0,9\text{ m} \leq x \leq 1,1\text{ m}$), pelo modelo analítico. Os três elementos centrais da interface fornecida pelo método numérico diferiam muito do que se esperava para o formato do *cusp*, por isso a equação do modelo analítico foi utilizada nessa região para extrapolar o resultado numérico, uma vez que a solução analítica corresponde ao formato esperado do *cusp*.

9.3 NÚMERO DE FROUDE CRÍTICO

Conforme foi apresentado no Capítulo 3, o parâmetro adimensional F , um tipo de número de Froude, nos mostra a relação entre as forças de pressão da fonte e as forças gravitacionais. Um determinado número de Froude caracteriza um determinado estado dinâmico do escoamento para uma determinada geometria. Geometrias semelhantes apresentam números de Froude críticos iguais. Esse Froude crítico indica de que a vazão, para o caso em estudo, é também a vazão crítica. Na Tabela 3, pode-se confirmar que para vazões de bombeamento críticas, o número de Froude crítico é o mesmo para casos geometricamente similares.

Tabela 3. Número de Froude crítico para geometrias semelhantes.

Geometria	F	Vazão Q (m^3/s)
(1m x 0,2m x 4mm)	0,00158	0,00000505
(2m x 0,4m x 4mm)	0,00158	0,00001010
(4m x 0,8m x 4mm)	0,00158	0,00002020
(8m x 1,6m x 4mm)	0,00158	0,00004040
(16m x 3,2m x 4mm)	0,00158	0,00008080

10 CONCLUSÃO

Por meio deste trabalho, puderam-se obter soluções analíticas para casos críticos do fenômeno do cone de água em regime permanente, de modo que as diferenças percentuais máximas em relação à solução numérica por elementos de contorno foram da ordem de 4% para as possíveis geometrias na célula de Hele-Shaw. As simulações numéricas, por sua vez, diferiram em cerca de 6% em relação a dados experimentais encontrados na literatura.

Um grande avanço do presente trabalho foi a implementação do método iterativo, utilizando-se do modelo analítico, para a obtenção da vazão crítica em um reservatório bidimensional, tendo em vista que esse parâmetro é um dos focos do trabalho. Neste caso, além da vazão, foi possível a obtenção de um parâmetro adimensional F , que caracteriza o estado dinâmico do escoamento considerado. Foi possível, então, relacionar um determinado F , relacionado a uma determinada geometria, ao estado crítico, ou seja, aquele escoamento na iminência de irrupção do cone.

Outro aspecto relevante do trabalho foi o sucesso na análise de equações governantes, de modo a validar o aparato experimental de acordo com a teoria envolvida, ou seja, certificou-se de que o escoamento pode ser considerado como um escoamento em meio poroso, descrito pela equação de Darcy, e que nesse meio poroso as forças de inércia são pequenas comparadas às viscosas.

Por fim, objetiva-se, em trabalhos futuros, a construção do aparato experimental e execução dos experimentos que conduzirão a uma melhor análise do cone em uma célula de Hele-Shaw. Espera-se, no experimento, encontrar vazões críticas relativamente inferiores às referentes aos métodos numérico e analítico, uma vez que esses métodos consideram condições idealizadas. A comparação entre as três abordagens poderá conduzir a resultados extremamente importantes no desenvolvimento do estudo do fenômeno de cone de água.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I. A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover Publications, 1972.
- [2] Bear, J., Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier, New York, 1972.
- [3] Cavalcante R. J., Previsão de comportamento de cone de água. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1996.
- [4] Harr, M. E., Groundwater and Seepage. McGRAW-HILL, 1962.
- [5] Introdução à Engenharia de Poço, Capítulo 9, Equipamentos de completação. Disponível em <http://dc197.4shared.com/doc/TPhtTOLh/preview.html>. Acesso em 25 de junho. 2012.
- [6] Kane, James H.. Boundary elements analysis in engineering of continuum mechanics, Editora Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [7] Kikuchi, M. M., Otimização de parâmetros de produção para minimizar os efeitos de cone de água. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1997.
- [8] McCarthy, J. F., Gas and water cresting towards horizontal wells. J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 1993, 35, 174-197
- [9] Notas de aula do professor Eder Lima de Albuquerque.
- [10] Notas de aula do professor Gustavo Coelho Abade.
- [11] Thomas E. J., Fundamentos da Engenharia do Petróleo. Editora Interciência, 2001.
- [12] Zhang, H., Barry, D. A., Hocking, G. C., Analysis of continuous and pulsed pumping of a phreatic aquifer. Advances in Water Resources, Vol. 22, 1999, **6**, 623-632.
- [13] Yih, C. S., A transformation for free-surface flow in porous media. Phys. Fluids 7, 1964, 20-24.
- [14] Yih, C. S., Stratified flows. Academic Press, New York, 1980.

ANEXOS

Anexo I	Desenho técnico da célula de Hele-Shaw
Anexo II	Desenho técnico da vista frontal da célula de Hele-Shaw
Anexo III	Desenho técnico da vista lateral da célula de Hele-Shaw
Anexo IV	Desenho técnico da vista superior da célula de Hele-Shaw
Anexo V	Código MatLab do método iterativo Newton-Raphson generalizado
Anexo VI	Código MatLab do método iterativo alternativo